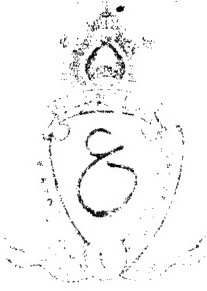


UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224515

UNIVERSAL
LIBRARY



تصانیف علامہ محمد علی شاہ

احصا کا ابتدائی رسالہ

حصہ دوم

مع توضیحات از علم ہندسہ، علم حیل، و طبیعیات
مُصَنَّف

جارج اے گلسن ایم۔ اے۔ ایل۔ ایل ڈی۔ ایف، آر ایس، ای
جس کا

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر کلیہ جامعہ عثمانیہ سرکار عالی نے اردو میں ترجمہ کیا
۱۳۲۶ھ ۳۴ م ۱۳۲۷ھ ۳۵ م ۱۳۲۸ھ ۳۶ م

طبع دارالکتاب اسلامیہ لاہور

دیباچہ از مترجم

احصا کے ابتدائی رسالہ مصنفہ نگین کا ترجمہ اردو میں حسب منظوری مجلس ریاضی و سائنس بی۔ اے کی جماعتوں کے لئے کیا گیا ہے۔ مبتدیوں کے لئے انگریزی زبان میں یہ مفید کتاب ہے، احصا کے اطلاق کے متعلق طبعی، حیل و ہندسی مسائل کی کثیر تعداد اس میں موجود ہے۔ ترجمہ تحت لفظی ہے کوئی ترمیم اصل پر نہیں کی گئی۔ کتاب کی ضخامت کی وجہ سے اس کو دو حصوں میں تقسیم کر دیا گیا ہے، ورنہ مضمون بالکل مسلسل ہے، جہاں تکمیل کی باضابطہ بحث شروع ہوتی ہے، وہاں سے حصہ دوم کی ابتدا کی گئی ہے۔ اس کتاب میں تفرق اور تکمیل میں کوئی خطا حاصل نہیں پیدا کیا گیا اور نہ ہی ہونا چاہئے، ایک نقطہ نظر سے مکمل تفرق کا الٹ ہے، اس لئے جہاں معیاری ضابطے تفرق کے حامل کئے جاتے ہیں وہاں تکمیل کی معیاری صورتیں بھی پیدا ہوتی ہیں، ٹھیک اس موقع پر طالب علم کو ان دونوں اعمال سے تماس پیدا کر لینا چاہئے۔

مجوزہ ترقیم و اصطلاحات کی فہرست اس کتاب کے ساتھ منسلک ہے، احصا کی علامات و رموز اساسی اہمیت رکھتی ہیں اور کثرت سے اعلیٰ ریاضی اور سائنس کے ہر شعبہ میں استعمال ہوتی ہیں، اس لئے ترقیم و علامات کا مناسب انتخاب اور ان کے لحاظ سے پوری یکسانیت ریاضی اور سائنس کی تمام شاخوں میں ضروری ہے۔ اس کتاب کے مطبع میں جانے کے بعد سائنس ترقیم کمیٹی جامعہ عثمانیہ نے

انگریزی ویونانی حروف کے لئے مثال عربی حروف اختیار کئے ہیں جن کے
ساتھ مطابقت آئندہ سے سائنس کے تمام شعبوں میں لازمی ہوگی، ان کی
فہرست حوالہ کے طور پر یہاں دی جاتی ہے، براہ کرم اس کتاب کی تفصیلی ترقیم
کو ان حروف کی مطابقت سے پڑھا جائے۔

منحصر

مفرد حروف انگریزی دیوانی کے مماثل مجوزہ حروف ۔

A	B	C	D	E	F	G	H
ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ح
I	J	K	L	M	N	O	P
آ	ث	ک	ل	م	ن	ط	پ
Q	R	S	T	U	V	W	X
ق	ر	س	ت	ع	و	ھ	لا
Y	Z						

ے ما

انگریزی کے بڑے (Capital) حروف بخط عربی لکھے جائینگے اور چھوٹے حروف بخط فارسی۔ نیز بڑے حروف جلی لکھے جائیں گے اور ان کے لیے پیمانہ بھی بڑا ہوگا۔

a	b	c	d
ا	ب	ج	د
A'	B'	C'	D'
ا'	ب'	ج'	د'
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁
ا ₁	ب ₁	ج ₁	د ₁

$\mathcal{L} \mathcal{B} \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta$

طه پیه شته صه ضه جیه یه عه

ι κ λ μ ν ξ ο π

۱۱ بحر فظ ن م ل ک ح

$\rho \quad \sigma \quad \tau \quad \upsilon \quad \phi \quad \chi \quad \psi \quad \omega$

سسہ پچہ خہ فہ چہ ٹہ شہ س'غہ

یونانی بڑے حروف کے لئے آخر میں ہ کی بجائے و لکھا جائے گا

.....میںے عا، با، جا،

دینی کالج

گذشتہ چند سالوں میں علمی سائنس کی تمام شاخوں میں بحد ترقی ہوئی ہے۔ جس کی وجہ سے طالب علم کے اوقات پر بوجھ بہت بڑھ گیا ہے، اس لئے بعض لوگوں کا خیال ہے کہ ریاضی کتب نصاب کی نوعیت میں تبدیلی کی ضرورت ہے۔ اس لحاظ سے کئی کتب ریاضی شائع ہوئی ہیں جو طلبہ کی خاص خاص جماعتوں کے لئے موزوں کی گئی ہیں، ان میں صرف اتنی اور اس قسم کی ریاضی مندرج ہوتی ہے جو صرف ان طلبہ کی اغراض کو پورا کرے۔ اس تبدیلی کے حق میں جو دلائل اکثر بیان کئے جاتے ہیں ان میں سے بعض کے ساتھ ہمیں دلی ہمدردی ہے۔ لیکن یہ ہمیشہ سے درست ہے اور آج بھی درست ہے کہ ریاضی سیکھنے کے لئے کوئی شاہ راہ نہیں ہے اور بغیر جانسوز کوشش کے اس علم کی کوئی مفید کار تحصیل نہیں ہو سکتی۔

بعض اوقات یہ کہا جاتا ہے کہ اگر طالب علم سادہ قوتوں، قوت نمائی اور لو کا قی تفاعلوں اور شاید حبیب اور حبیب التمام کے مشقوں اور تکملوں کے ساتھ پوری واقفیت رکھتا ہو تو فن انجینیری کے لئے علم احصا کی استعداد زیادہ کافی ہے۔ اس بیان میں سچائی کی بڑی مقدار موجود ہے، تاہم یاد رہے کہ اگر محض نتائج کے اقتباس اور استعمال کی حد سے زیادہ استعداد مطلوب ہو تو یہ ان چند سبق سے حاصل نہیں ہو سکتی جو بالعموم ابتدائی اصولوں کی تشریح کے لئے کافی خیال کئے جاتے ہیں۔

یہ شاید ممکن ہے کہ چند سبقوں میں احصا کے خاص نتائج کی کافی مقدار بیان کر دیا جائے اور ان کی توضیح بھی کر دیا جائے اور ان کی مدد سے طالب علم حلی اور طبعی مسائل کی ابتدائی بحث کو ایک حد تک بخوبی سمجھ سکے، لیکن احصا کا اس قدر سطحی کورس اگرچہ فائدہ سے خالی نہیں مگر ہر دو مقدار اور نوعیت کے لحاظ سے یہ اس قسم کے عملی مضامین کے برجستہ مطالعہ کے لئے مطلق کافی نہیں ہے جیسے متبادل برقی رو کا نظریہ، حرکیات، حرکت سیالات، پچک کا نظریہ وغیرہ اور جس طالب علم کی بنیاد محض مندرجہ بالا کورس پر رکھی گئی ہے اس کے لئے طبیعیات اور کیمیا کے جدید معلومات اور مضامین تک رسائی محال ہوگی۔ علاوہ اس کے ہر دو تدریس تعلیمی اسکیم کا یہ مقصد ہوتا چاہئے کہ طالب علم اپنے مذاق کے خاص فن میں بذات خود تحقیق و جستجو کرنے کے قابل ہو جائے، جدید سائنس کے ہنر و ہنر پرستی مسائل اور اس قدر تفصیل جو اس کے ساتھ مخصوص ہے ان سب کی بنا پر کچھ کم لازم نہیں آتا کہ ریاضی کی تعلیم میں نکل سے کام نہ لیا جائے۔ اس امر کے مد نظر کہ طالب علم کو بالآخر کسی ایک خاص فن میں مہارت حاصل کرنا ہے۔ اور بھی ضروری معلوم ہوتا ہے کہ ابتدائی منزلوں میں اس کی ریاضی کی تعلیم بالکل وہی ہو خواہ بعد میں وہ خالص ریاضی کی تحصیل میں اپنا پورا وقت لگانا چاہئے یا سائنس کی زیادہ علمی شاخوں میں۔ اور یہ خاص طور پر ضروری ہے کیونکہ تخیل کے اعمال جو کسی حلی، طبعی یا کیمیادی منظر کے سنجیدہ مطالعہ میں شامل ہوتے ہیں وہ ان اعمال کے ساتھ بہت کچھ لگاؤ اور اشتراک رکھتے ہیں جو احصا (کیلکولس) کی تعلیم میں منکشف ہوتے ہیں۔

ابتداء میں احصا پر جو کتابیں لکھی گئیں جیسے مککلارن اور سمسن کے رسالے وہ صرف خالص ریاضی دانوں کے لئے ہی تصنیف نہیں کی گئی تھیں، بلکہ اکثر ان کی توضیحات طبعی فلسفہ سے حاصل کی گئی تھیں، بعد میں شاید طبیعیات کی وسعت کے بڑھ جانے سے ایسی کتابوں میں احصا کا طبعی استعمال کم ہوتا گیا اور احصا کی کتابیں ایک حد تک اعلیٰ ہندسہ کے رسالے بن گئیں۔ علم ریاضی کی موجودہ صورت حال یہ ہے کہ احصا کی کتابوں کو نہ اعلیٰ ہندسہ کی کتب نصاب بن جانا چاہیئے اور نہ ہی ان کے لئے طبیعیات، انجینئرنگ یا کیمیا کی کتابیں بن جانا درست ہے۔

احصا کے ابتدائی رسالہ سے جو مقبول امید کی جاسکتی ہے وہ یہ ہے کہ یہ طالب علم کو احصا کے اصولوں اور اعمال کو آسانی کے ساتھ اپنے ایسے مطالبات میں لگانے کے لئے تیار کرے جن میں احصا عام طور پر استعمال ہوتا ہے۔ اس غرض کو پورا کرنے کے لئے احصا کے مضمون کی توضیح علوم ہندسہ، حیل اور طبیعیات سے ہونی چاہئے جبکہ ان فنون کی ذاتی اور خصوصی مشکلات کو خاص کتب نصاب میں تفصیلی بحث کے لئے جگہ دی جائے اور یہ توضیحات اپنا اصل مقصد صرف عام اصولوں پر روشنی ڈالنے کا پورا کریں اور ذہنی مشکلات کو رفع کرنے کی بجائے انہیں اور پیدا نہ کر دیں۔ علم کیمیا کے متعلق یہ کہا جاسکتا ہے کہ احصا کے پختہ علم کی اس میں خاص ضرورت ہے کیونکہ کیمیائی تحقیقات میں ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاضلوں کے خواص زیادہ تر استعمال ہوتے ہیں۔

حال میں (Van Laar) کی کتاب (Lehrbuch der Mathematischen Chemie) اس قسم کی تعینات کا پیش خیمہ ہے جن سے قطع نظر نہیں ہو سکتی۔ [Chemie] اس میں مذکورہ بالا مقاصد کو حاصل کرنے کی کوشش کی گئی ہے طالب علم کی ریاضی قابلیت کے متعلق صرف اتنا فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ اس کتاب کے مطالعہ سے پیشتر ہندسہ کے ان مقالوں سے واقف ہے جو اکثر پڑھے جاتے ہیں نیز اس کی استعداد جبر و مقابلہ میں مسئلہ ثنائی تک ہے اور ستوی علم مثلث میں مسئلہ جمع تک۔ (تلف خیالی) اعداد کو اس کتاب میں استعمال نہیں کیا گیا اور نہ ہی لامتناہی سلسلوں کے علم کو پہلے سے تسلیم کر لیا گیا ہے۔ جدید ریاضی کی باریکیوں کو دیدہ دانستہ جگہ نہیں دی گئی کیونکہ نہ تو وہ مبتدی کے لئے مفید ہیں اور نہ ہی انہیں کی سمجھ میں آ سکتی ہیں۔ ہندسی غیلات کی طرف متوازن توجہ دلائی گئی ہے اور ساتھ ہی فن کی طبیعی پیدائش کو پیش نظر رکھا گیا ہے۔

شروع کے ابواب میں بہت سا مواد ہے جو نفس مضمون سے تعلق نہیں رکھتا لیکن تدریسوں اور کامیوں کا نظریہ اس قدر اہمیت رکھتا ہے اور اس قدر نامکمل طور پر پیش کیا جاتا ہے کہ اس کا تذکرہ اس کتاب میں ضروری خیال کیا گیا۔ ہندسہ تحلیلی کے اصولوں کو جہاں تک وہ احصا کے استعمال اور اس کے بنیادی اصولوں کی

تشریح کے لئے حقیقی طور پر کارآمد ہو سکتے ہیں میں نے بہت تامل کے ساتھ اس کتاب کے متن میں شریک کیا۔ ہندسہ میں احصا کے کثیر استعمال سے اگر قطع نظم کی جائے تو احصا کی تفہیم میں محدودوں کے ہندسہ کے وسیع علم کی چندال ضرورت نہیں معلوم ہوتی۔ مجھے امید ہے کہ اس ہندسہ کے ابتدائی اصولوں کی کافی تشریح کر دی گئی ہے جو بہت سے طلبہ کی عملی ضروریات کو پورا کرے گی، اعلیٰ مستوی نغنیات اور سطحوں کے نظریہ کی بحث کو میں نے اس کتاب میں بیکہ نہیں دی کیونکہ میری رائے میں یہ بحث ابتدائی رسالہ کے موزوں نہیں۔

دوسری جدت اس کتاب میں ساداتوں کے نظریہ کا باب ہے، اس جدت کی صرف اس لئے ضرورت نہیں محسوس ہوئی کہ اس سے احصا کی علم حساب سے توضیح ہوتی ہے بلکہ اس لئے بھی کہ عملی نقطہ نظر سے یہ مضمون بڑی اہمیت رکھتا ہے اور ابتدائی ساداتوں کی بحث پر بہت کم ابتدائی کتابیں موجود ہیں۔

مضمون کی اس عام ترتیب اور ارتقا کو میں نے کئی سالوں سے اپنی جماعتوں کی تدریس میں استعمال کیا ہے، شرح اور انتہا کے تخیلات کی بحث قدرے طولانی ہے لیکن جلیبی یا طبعی سوالات میں احصا کے استعمال کی خاص مشکلات کا مقابلہ کرنے کے لئے تجربہ کی بنا پر میں نے اس طرز عمل کو نہایت سودمند پایا ہے، اگرچہ تخیلات پورے طور پر سمجھ میں آجائیں تو بعد کی ترقی زیادہ سریع اور یقینی ہوتی ہے۔ تفرق اور تنجمل کے درمیان کوئی خاص خط فاصل نہیں کھینچا گیا اور تکمیل کے کئی ضروری نتائج اس شاخ کا تفصیلی مطالعہ شروع کرنے سے پہلے حاصل کئے گئے ہیں۔ دسویں باب میں قبول اور مشتق تنجملی نغنیات کی جو بحث درج کی گئی ہے اس سے محدود تنجملہ کی ہندی تفریف کے لئے ایک حد تک تسلی بخش بنیاد پیدا کرنا ہی مقصود نہیں ہے بلکہ ترقی تنجمل کے ایک طریقہ کی توضیح کرنا بھی ہے جو انجینئروں کے لئے اہمیت رکھتا ہے اور خاص نظری بحث میں بھی فائدہ سے خالی نہیں۔

حال کی کتب نصاب کی طرح ٹیکس کے مسئلہ کی بحث بہت بعد میں لائی گئی ہے، ابتدائی نمبروں میں اوسط قیمت کا مسئلہ کافی ہے سلسلوں کے استدفاق اور تسلسل کے متعلق ایک حد تک بسیط مسائل اس کتاب کے آخر کی طرف بحث میں

لائے گئے ہیں۔ تاہم مضمون کی بحث ایسی ہے کہ جو اساتذہ معمولی ترتیب کو زیادہ پسند کریں وہ فوراً مسئلہ اوسط قیمت سے لامتناہی سلسلوں اور ٹیلیس کے مسئلہ [ابواب پنجم و ششم حصہ دوم] کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

ایک سے زیادہ تغیروں کے تفاعل اس قدر تفصیل سے بحث میں نہ لائے گئے جیسے ایک تغیر کے تفاعل۔ تاہم ان کے نظریہ کے وہ حصے منتخب کر کے پیش کرنے کی کوشش کی گئی ہے جو طبیعی علیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ کتاب کے آخر میں ایک چھوٹا سا باب معمولی تفرقی مساواتوں پر ہے جن سے مساواتوں کے ایسے نمونوں کی توضیح ہوتی ہے جو اکثر علم حرکت، طبیعیات، جیلی اور برقی انجینئرنگ میں پائے جاتے ہیں۔

اکثر حصوں کے ساتھ سادہ مشقیں درج ہیں، مثالوں کے ان سستہ مجموعوں میں کئی مسئلے اور نتائج ایسے مینگے جن کے لئے کتاب کے متن میں جگہ نہیں مل سکتی تھی لیکن اہمیت کے لحاظ سے ان کا بالتصریح بیان کیا جانا ضروری تھا۔ طالب علم کی حوصلہ افزائی کے لئے کہ وہ اپنے تئیں اس شوق و محنت میں ڈالے جو احصا کے استعمال میں سہولت و اعتماد حاصل کرنے کے لئے قطعی طور پر لازمی ہے میرے زیادہ ضروری اشلہ کے حل کے متعلق بلا تکلف اشارے درج کئے ہیں۔

اس کتاب کی تیاری میں کئی رسالوں کے مطالعہ کرنے کا موقع ہوا اور جہاں کہیں جان بوجھ کر کوئی طرز تشریح اختیار کی گئی ہے جو کسی خاص مصنف کے ساتھ مخصوص ہے اس کا احتیاط سے مناسب اعتراف کر دیا گیا ہے، لیکن جب کوئی شخص ساہماں سال سے ایک مضمون پڑھا رہا ہو اس کے لئے اپنے علم کے تمام ماحذوں کا شت کر لینا دشوار ہے، پس ممکن ہے کہ میں نے زیادہ وسیع طور پر اقتیاس کیا ہو جس کا مجھے علم نہ ہو۔

دوسرے ایدیشن کا دیباچہ

اس ایدیشن کے لئے کوئی خاص تبدیلیاں پہلے ایدیشن پر نہیں کی گئیں، تاہم اس میں دو بابوں کا اس غرض سے اضافہ کر دیا گیا ہے کہ یہ کتاب، ریاضی طبعی کے طلبہ کے لئے زیادہ مفید بن جائے۔ علاست تکمیل کے اندر اعمال کی بحث میں مین نے (M Charles J. de la Vallée Poussin) کا طریقہ اختیار کیا ہے جو اس نے اپنے مکتوب (Etude des intergrals a limites infinies) میں درج کیا ہے، سیری رائے میں اس طریقہ کے اندر سادگی اور صحت نمایاں حد تک موجود ہیں۔ یہ امید کی جاتی ہے کہ فوسر کے سلسلوں کا باب اس مضمون کے لئے کافی تمہید ثابت ہوگا لیکن اس امر کی کافی زور سے سفارش نہیں کی جاسکتی کہ طالب علم خود ان دلچسپ صفحات کا مطالعہ کرے اور ان پر پورا عبور حاصل کرے جن میں خود فوسر کی گہری اختیاری تفاعل کو موسیقی سلسلوں سے تعبیر کرنے کے عمل کو تکمیل تک پہنچاتا ہے۔

جارج، اے، گکسن

گلاسگو نومبر ۱۹۰۵ء

پہلے مطالعہ کیلئے ہدایات

ابتدی احصا کے مطالعہ میں ذیل کی ترتیب اختیار کر سکتے ہیں۔

باب اول تا چہارم۔ پنجم دفعات ۴ تا ۴، ششم، ہفتم دفعہ ۶ (مشق ۱۴ سوالات آتا ۴ اور ۱۱ تا ۱۴) ہفتم دفعات ۴ تا ۶، (مشق ۱۶ اور ۱۶ ب) دفعہ ۷ (مشق ۱ سوالات آتا ۶) اس کو کس میں جبریہ تفاعلوں کے اساسی خواص مع ان کے دلچسپ استعمال کے شامل ہیں۔

باب پنجم دفعات ۴۸۔ ۵۰، ہفتم، ہشتم اور باقی حصہ باب نہم، دہم اور باب اول تا سوم، حصہ دوم۔

ابواب آتا ۱۰ پر پورا ملکہ حاصل کر لینے کے بعد ابواب یازدہم، دوازدہم باب چہارم تا ہفتم حصہ دوم کا مطالعہ کیا جائے جیسے ضرورت محسوس ہو۔ جب تکمیل کے اعمال میں کچھ استعداد حاصل ہو جائے تو اس کے بعد فوراً آٹھواں باب، حصہ دوم شروع کر دیا جاسکتا ہے۔

فہرست مضامین

حصہ دوم

صفحہ	مضمون	صفحہ
	باب اول	
	تکمیل	
۱	تکمل - نامحدود اور محدود تکمل کا اشتق	۱
۲	معیاری صورتیں	۲
۴	جبریہ اور مشائی تحوّلیں	۳
۱۱	مشق ۱	
۱۳	متغیر کی تبدیلی	۴
۱۵	متغیر پر لگنے کی مثالیں	۵
۱۸	دوسرے درجہ کے تفاعل	۶
۲۱	مشقی اور زائدی ابدال	۷
۲۲	مشقی تکمل	۸

۲۵	مشق ۲	
۲۸	تکمل بالخصص	۹
۳۱	متواتر تحویل - تکملہ $\frac{4}{3}$ ج ب لا جم لا فر لا	۱۰
۳۸	مشق ۳	
۴۲	جزوی کسور	۱۱
۴۶	منطق تفاعلوں کا تکمل	۱۲
۴۷	غیر منطق تفاعل	۱۳
۵۰	نام مشاہدات	۱۴
۵۱	مشق ۴	
	باب دوم	
	محدود تکملے - ہندی سوا لائیں ان کا استعمال	
۵۴	محدود تکملہ - مسائل	۱۵
۵۹	مربوط تکملے	۱۶
۶۲	لا متناہی حدود - لا متناہی تکمل	۱۷
۶۶	مشق ۵	
۷۰	چند معیاری رتبے اور حجم - نختات کی ترسیم	۱۸
۸۱	مشق ۶	
	بند نختی کا رقبہ	۱۹

۸۶	رقبہ جو ایک متحرک خط مستقیم اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے	۲۰
۸۹	سطح پیمیا	۲۱
۹۰	مشق ۷	
	باب سوم	
	تکملہ مجموعہ کی انتہا خیال کیا جاسکتا ہے۔ دوسرے تکملے	
۹۴	تکملہ ایک مجموعہ کی انتہا ہے	۲۲
۹۸	مشالیں	۲۳
۱۰۰	تقربات۔ سین کا کلیہ	۲۴
۱۰۵	مشق ۸	
۱۰۸	اوسط قیمتیں تکملے	۲۵
۱۰۹	دوسرے تکملے	۲۶
۱۱۳	دوسرے تکملوں کی تقسیم قطبی اجزا	۲۷
۱۱۹	جمود کے مرکز	۲۸
۱۲۳	جمود کا سمیٹا اثر	۲۹
۱۲۷	حجم کا قطبی جزو۔ خطی تکملہ اور سطحی تکملہ کی تعریف	۳۰
۱۳۰	مشق ۹	
۱۳۳	گاما اور بیٹا تفاعل	
	باب چہارم	
	انحناء۔ لٹاف	
۱۳۸	انحناء۔ اساسی ضابطہ	۳۱

۱۴۰	دائرہ انحناء، نصف قطر، مرکز دائرہ انحناء	۳۲
۱۴۳	انحناء کے لئے اور ضابطے۔ انحناء کی ذاتی مساوات	۳۳
۱۴۹	مشق ۱۰	
۱۵۳	برقیہ چیمہ۔ درمیچیمہ۔ متوازی انحناء	۳۴
۱۵۷	لفاف	۳۵
۱۵۸	لفاف کی مساوات۔ مسئلہ تھامس	۳۶
۱۶۲	خط تدویر۔ برتدویر۔ درتدویر	۳۷
	مشق ۱۱	
	باب پنجم	
	لا متناہی سلسلے	
۱۷۴	لا متناہی سلسلے۔ مستحق، شمع، اہتراری سلسلے	۳۸
۱۷۷	انتہا کا وجود۔ مسائل	۳۹
	استدقاق پرکھنے کے طریقے۔ بنیادی جانچ۔ مقابلہ کی جانچ	۴۰
۱۸۰	جانچ کی نسبت۔ باقی	
۱۸۵	استدقاق مطلق۔ قوی سلسلے	۴۱
۱۸۹	یکساں استدقاق۔ سلسلوں کا تسلسل	۴۲
۱۹۴	مشق ۱۲	
	باب ششم	
	ٹیلر کا مسئلہ	
۱۹۸	ٹیلر کا مسئلہ۔ سکلارن کا مسئلہ۔ باقی	۴۳

۲۰۳	پھیلاؤ کی مثالیں۔ جب لا جہم لا، فوز لا، نوک لا، نوک لا	۴۴
۲۰۹	ن، وین شتق کا محسوب کرنا۔ مثالیں	۴۵
۲۱۲	سلسلوں کا تفرق اور تکمیل	۴۶
۲۱۶	پھیلاؤ، تقریبات۔ سلسلوں کے تکمیل کی مثالیں	۴۷
	مشق ۱۳	
	باب ہفتم	
	دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لیے شید کا مسئلہ استعمال	
۲۲۹	دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لیے شید کا مسئلہ	۴۸
۲۳۷	مثالیں۔ ماسی مستوی۔ تجانس تفاعلوں کے متعلق آگے کے مسئلے	۴۹
۲۴۶	دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعل کی اعظم اور اقل قسمیں	۵۰
۲۳۹	مثالیں۔ غیر معین اجزائے ضربی	۵۱
	مشق ۱۴	
۲۴۴	غیر معین متغیریں۔ ابتدائی طریقہ	۵۲
۲۴۹	احصا کا طریقہ	۵۳
۲۵۷	مشق ۱۵	
	باب ہشتم	
	تقرقی مساواتیں	
۲۵۸	تقرقی مساواتیں۔ تعریفات۔ مثالیں	۵۴

۲۶۰	پورا تکملہ	۵۵
۲۶۲	مشق ۱۶	
۲۶۴	رتبہ اول اور درجہ اول کی مساواتیں - متغیر جہائی پذیر -	۵۶
	متجانس مساواتیں خطی مساواتیں - ٹھیک مساواتیں	
	رتبہ اول کی مساواتیں جو درجہ اول کی نہ ہوں - کلیروی	۵۷
۲۶۰	مساوات - نادرل -	
۲۶۱	دوسرے رتبہ کی مساواتیں - سادہ رفاص	۵۸
۲۶۳	خطی مساواتیں - عام خاصیت	۵۹
۲۶۴	تسلسلہ	۶۰
۲۶۷	خاص تکملہ	۶۱
۲۸۰	ہمزاد مساواتیں - برقی طوقوں کی مثال	۶۲
۲۸۴	مشق ۱۷	
	بانیہ	
	محدود تکملے - علامت تکمل کے اندر اعمال	
۲۸۹	تکملہ کا تسلسل	۶۳
۲۹۱	غیر واجب تکملہ	
۲۹۱	لا متناہی حدود	۶۴
۲۹۳	مطلق اور شرط استدقاق تکملے	
۲۹۵	لا متناہی تکمل - دوہرے	۶۵
۲۹۸	دو مشہور تکملے	۶۶
۳۰۲	گاما تفاعل	۶۷

۳۰۳	۶۸	اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ - یک رنگ تفاعل - ایبل کی لاتساوی
۳۰۹		مشق ۱۸
۳۱۲	۶۹	علاست تکمل کے اندر اعمال - تفاعل کا یکساں تسلسل
۳۱۸	۷۰	تکملوں کا یکساں استمداق
۳۲۲	۷۱	تسلسل اور حدود
۳۲۶	۷۲	علاست تکمل کے اندر اعمال - مشہور تکملے
	۷۳	لا انتہا حدود کے لئے تکمل کی ترتیب یکساں استمداق
۳۳۶		بالعسوم
۳۴۱	۷۴	دیگر غیر واجب تکملے - مثالیں
۳۴۷		مشق ۱۹
		باب دوم
		فوریر کے سلسلے
۳۵۴	۷۵	فوریر کے سلسلے - مثالیں
۳۵۷	۷۶	مسئلہ کا بیان - تفاعل پر قیود
۳۶۰	۷۷	دیبر شلے کا مجموعہ
۳۶۴	۷۸	سلسلوں کا جمع کرنا
۳۶۵	۷۹	عدم تسلسل
۳۶۶	۸۰	مبداء اور ردور کی تبدیلی
۳۶۷	۸۱	جیب اور جیب التمام کے سلسلے

۳۶۹	عام امور کا ذکر۔ فوریر کے سلسلوں کا تحمل اور تفرق	۸۲
۳۷۰	مثالیں	۸۳
۳۷۲	چند معیاری سلسلے	۸۴
۳۷۶	فوریر کا دوبہرہ تحمل	۸۵
۳۸۰	آزمائشی تفصائل	۸۶
۳۸۰	حوالے	۸۷
۳۸۱	مشق ۲۰	
۳۸۶	ضمیمہ	
۳۹۱	جوابات	



احصا کا ابتدائی رسالہ

حصہ دوم باب اول تکمیل

۱۔ تکمیل۔ دفعہ ۸۲ حصہ اول میں تکمیلی احصا کا اساسی مسئلہ بیان کیا گیا ہے اور وہ یہ ہے ”ایک مسلسل تفاعل فا (لا) معلوم ہے، ایک ایسا تفاعل معلوم کرنا مقصود ہے (۱) جس کا مشتق فا (لا) ہو اور (۲) جو ایک معلوم قیمت (۱) اختیار کرے جبکہ لا کو قیمت ۱ دیا جائے۔“

اگر فرض پہلی شرط کی قید ہو تو اس سوال کے پیشمار حل ہونگے، لیکن ہم جانتے ہیں کہ سب حل ایک دوسرے سے صرف بلحاظ ایک مستقل مقدار کے مختلف ہوں گے۔ اسے کسی ایک حل کو ہم فا (لا) کا نام محدود تکملہ یا تکمیلی کہیں گے اور مذکورہ مستقل تکملہ کا تعلق کہلائیکا۔ اس مستقل کو بعض اوقات اختیاری مستقل بھی کہا جائیگا کیونکہ اس کو جو قیمت ہم چاہیں دیتے ہیں۔ اگر ف (لا) کوئی ایک تکملہ ہو تو ف (لا) + ج کو ہم عام تکملہ کہیں گے جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

مطلوب تفاعلوں کی ترقیم عفا فا (لا) کی بجائے فا (لا) کے

نامحدود تکملہ کو بالعموم علامت

جس کا (لا) فر لا (۱)
 سے تعبیر کیا جائیگا اور اسے ہم لکھیں گے "فا (لا) کا تکملہ یا تکملی بلحاظ لا کے" یا مختصراً
 "فا (لا) فر لا کا تکملہ"۔ تفریقی فر لا تکمل کے متغیر یعنی لا کو ظاہر کرتا ہے اور پوری مشترک
 علامت جس کا فر لا سے مراد ہے ".... کا تکملہ بلحاظ لا کے"
 فا (لا) کو تکمل کہا جائیگا۔

دفعہ ۸۲ حصہ اول میں جو کچھ [عفا فا (لا) آ] سے تعبیر کیا گیا تھا وہ اب

جس کا (لا) فر لا (۲)

سے تعبیر ہوگا اور مؤخر انداز کو اس طرح پڑھا جائیگا "فا (لا) فر لا کا تکملہ
 اے ب تک"۔ جو تفاعل علامت جس کا (لا) فر لا سے
 تعبیر ہوتا ہے اسے ہم محدود تکملہ کہیں گے اور اے ب تکملہ کی حدود پہلانیگی اور بجلی حد ہے
 اور بے اوپر کی۔ واضح ہو کہ یہاں حد سے مراد ہے متغیر کی وہ قیمت جو وقفہ کے
 ایک سرے پر ہو یعنی سرے پر کی قیمت۔ حد کے کسی اور اصطلاحی مفہوم سے اسے تیز کیا جائے۔
 ہندسی نقطہ نظر سے علامت (۲) اس رقبہ کو بلحاظ علامت اور مقدار کے تعبیر کرتی ہے جو
 فا (لا) کی ترسیم کا معین بجلی حد سے اوپر کی حد تک جانے میں عبور کرتا ہے۔ اگر
 ف (لا) فا (لا) کا ایک نامحدود تکملہ ہو تو حسب دفعہ ۸۲ حصہ اول

جس کا (لا) فر لا = [عفا فا (لا) آ] = ف (ب)۔ ف (ا) (۳)

اگر ہم چاہیں تو ف (لا) کی بجائے عام تکملہ ف (لا) + ج استعمال کر سکتے ہیں مگر
 حائل نتیجہ دونوں صورتوں میں وہی ہوگا کیونکہ عمل تفریقی میں مستقل ج غائب ہو جائے گا۔
 ہندسی مفہوم کی بنیاد پر یا (۳) سے ظاہر ہے کہ

جس کا (لا) فر لا =۔ جس کا (لا) فر لا = ف (ا)۔ ف (ب) (۴)

یعنی حدود اے ب کا باہم تبادلہ ہو سکتا ہے اگر ہم تکملہ کی علامت بدل دیں۔

نیز ہندی مفہوم سے یا شکل ف (اب)۔ ف (ا) سے ظاہر ہے کہ محدود تکمل صرف اپنی حدود کا تفاعل ہے اور تغیر کا تفاعل نہیں ہے۔ پس مڑ ف (ا) (د) فرع کی بالکل وہی قیمت ہے جو مڑ ف (لا) فرلا کی۔

شرح کے نقطہ خیال سے اگر دیکھا جائے تو ف (لا) مشتق ہے ف (لا) کا اُس لئے یہ پیش شرح کا اندازہ کرتا ہے جس کے موافق کہ ف (لا) بلحاظ لا کے بڑھتا ہے۔ پس اگر لا، ا سے ب تک بڑھے تو ف (لا) کا کل اضافہ خواہ یہ مثبت ہو یا منفی، ف (ب)۔ ف (ا) کے مساوی ہوتا ہے۔ اسلئے معلوم ہوا کہ محدود تکملہ (۳) وجہ یا دلیل کے اضافے (ب)۔ ا کے جواب میں ف (لا) کے کل اضافے کا ناپ ہے جبکہ تفاعل کی شرح تغیر ف (لا) معلوم ہو۔

جس تفاعل کا مشتق ف (لا) ہے اور جو ا کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا، ا کے مساوی ہو وہ ہے (دفعہ ۸۲، حصہ اول)

عفا ف (لا)۔ [عفا ف (لا)] + ا

اور موجودہ ترقیم کے موافق یہ ہے

مڑ ف (لا) فرلا + ا یا مڑ ف (ا) (د) فرع + ا (۵)

یہاں اوپر کی حد لا، وجہ کی وہ خاص قیمت ہے جس کے لئے تفاعل محسوب کیا گیا دفعہ ۸۲ حصہ اول کی ہندی تعبیر میں اوپر کی حد لا نقطہ ن کا فصلہ و مر ہے شرح کے نقطہ نظر سے علامت (۵) اُس تفاعل کو تعبیر کرتی ہے جو شرح ف (لا) کے حساب سے بدلتا ہے اور جو ا کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا، ا کے مساوی ہو۔ محدود تکملوں کا مضمون اگلے باب میں زیادہ تفصیل سے بحث میں آئے گا تاہم جو کچھ اس کے متعلق اس دفعہ میں باب دہم حصہ اول میں دیا گیا ہے وہ اس امر کے لئے کافی ہے کہ طالب علم رقبوں وغیرہ کے آسان سوالات کو جو اس باب کے آخر میں مشق کے طور پر دیئے گئے ہیں آسانی حل کر سکے۔

۲۔ معیاری صورتیں۔ جہاں تک موجودہ بحث کا تعلق ہے تکمل محض عمل تفرق کا الٹ ہے اور کسی تکملہ کو محسوب کرنے کے لئے خواہ یہ محدود ہو یا نامحدود بیض ذریعہ ہے کہ معلومہ تکملوں کی ایک جدول پہلے سے مرتب کر لی جائے۔ یہ جدول تفرق کے معلومہ نتائج سے جو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں مرتب ہو سکیگی۔ اس لئے سب سے پہلے ہم معیاری صورتوں کی جدول تیار کر چکے ہیں اس کے بعد ان تکملوں کو جو جدول میں موجود نہیں ہیں ایسی صورتوں میں تبدیل کرنے کے طریقے بیان کر چکے ہیں جن کے تکملے معیاری صورتوں کی مدد سے معلوم ہو سکیں۔ نامحدود تکملوں کی تمام صورتوں میں اس جانچ کو عمل میں لانا چاہئے کہ تکملہ کا مشتق لازماً مساوی ہو یا تکمیل کے۔

یا علامات میں ف (لا) = م (ف (لا) فلا اگر $\frac{ف (لا)}{فلا} = ف (لا)$ پس تکملہ کی تعریف یا تعین کے لئے حسب ذیل مساوات ہے۔

ف (لا) = م (ف (لا) فلا = ف (لا)

یعنی اعمال ف (لا) اور م (لا).... فلا ایک دوسرے کے الٹ ہیں تفرقوں کے مفہوم کے لحاظ سے ف (لا) فلا تفرقہ ہے ف (لا) کا جبکہ ف (لا) تکملہ ہو ف (لا) کا۔ ف (لا) کو اکثر اوقات تفرقہ ف (لا) فلا کا تکملہ کہا جاتا ہے۔ چونکہ

ف (لا) فلا = ف (لا) = م (ف (لا) فلا

پس عامل ف (لا) اور م (لا) ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

جدول ذیل میں اساسی معیاری صورتیں دی گئی ہیں باقی مشہور صورتیں بعد میں دی جائیں گی۔ بعض معیاری صورتوں کو دو شکلوں میں دکھایا گیا ہے، دلیل اکثر اوقات اس خطی شکل (لا) ب میں واقع ہوتی ہے اس لئے طالب علم کو ابتدا سے ہی اسکے متناظر تکملہ سے مانوس ہو جانا چاہئے۔ ان سب نتائج کی جانچ عمل تفرق سے کر لینی چاہئے۔

(۱) اگر $n \neq 1$ تو

$$س \text{ لا } فرلا = \frac{n^{14}}{1+n} \quad ، \quad س (ولا + ب) فرلا = \frac{(ولا + ب)^{14}}{(1+n)}$$

(۲) اگر $n = 1$ تو

$$س \frac{1}{لا} فرلا = لوک لا \quad ، \quad س \frac{1}{ولا + ب} فرلا = \frac{1}{و} لوک (ولا + ب)$$

$$(۳) \quad س \frac{1}{و} فرلا = \frac{1}{و} \quad ، \quad س \frac{1}{و} فرلا = \frac{1}{و}$$

$$(۴) \quad س جب لا فرلا = جم لا \quad ، \quad س جب (ولا + ب) فرلا = \frac{1}{و} جم (ولا + ب)$$

$$(۵) \quad س جم لا فرلا = جب لا \quad ، \quad س جم (ولا + ب) فرلا = \frac{1}{و} جب (ولا + ب)$$

$$(۶) \quad س قطا لا فرلا = مس لا \quad ، \quad س قطا (ولا + ب) فرلا = \frac{1}{و} مس (ولا + ب)$$

$$(۷) \quad س قتم لا فرلا = مم لا \quad ، \quad س قتم (ولا + ب) فرلا = \frac{1}{و} مم (ولا + ب)$$

$$(۸) \quad س \frac{فرلا}{لا - لا} = جب لا \quad ، \quad س \frac{فرلا}{لا - لا} = جب لا$$

$$یا = جم لا \quad ، \quad یا = جم لا$$

$$(۹) \quad س \frac{فرلا}{لا \pm لا} = لوک لا \quad ، \quad س \frac{فرلا}{لا \pm لا} = لوک لا$$

$$(لا \pm لا) \quad ، \quad (لا \pm لا)$$

$$(۱۰) \quad س \frac{فرلا}{لا + لا} = مس لا \quad ، \quad س \frac{فرلا}{لا + لا} = مس لا$$

$$یا = مم لا \quad ، \quad یا = مم لا$$

$$(۱۱) \quad س \frac{فرلا}{لا - لا} = \frac{1}{و} لوک لا \quad ، \quad س \frac{فرلا}{لا - لا} = \frac{1}{و} لوک لا$$

$$(لا - لا) \quad ، \quad (لا - لا)$$

مشق ۱۔ ذیل کے تفاعلوں کو بلحاظ لا کے مکمل کرو

$$\frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}} \quad \frac{1}{\text{لا}}$$

مشق ۲۔ ذیل میں جو تکملے مندرج ہیں ان کی قیمتیں معلوم کرو

$$\frac{\text{مر}}{\text{لا}} \text{ جب لا فرلا} \quad \frac{\text{مر}}{\text{لا}} \text{ جب لا فرلا} \quad \frac{\text{مر}}{\text{لا}} \text{ جب لا فرلا} \quad \frac{\text{مر}}{\text{لا}} \text{ جب لا فرلا} \quad \frac{\text{مر}}{\text{لا}} \text{ جب لا فرلا}$$

۳۔ جبر یہ اور مثلثی تحویلیں تکملہ کی تعریف کی رو سے اور مسائل ۲، ۳

دفعہ ۵۸ حصہ اول کے استعمال کرنے سے ذیل کے مسئلے آسانی ثابت ہو سکتے ہیں
(۱) مر ج فا (لا) فرلا = ج مر فا (لا) فرلا جہاں ج مستقل ہے

$$(۲) \text{مر} (ع - و + + ی) \text{فرلا} = \text{مر} ع \text{فرلا} - \text{مر} و \text{فرلا} + - \text{مر} ی \text{فرلا}$$

جہاں ع، و،، ی بھی متغیر لا کے تفاعل ہیں یا مستقل ہیں۔

(۲) میں دائیں طرف کے تکملہ کا مشتق تعریف کی رو سے ع - و + + ی ہے
اور مسئلہ ۲، دفعہ ۵۸ حصہ اول کی رو سے بائیں جانب کے مجموعہ کا مشتق ثقلوں کے مشتقوں
کا مجموعہ ہے جو تکملہ کی تعریف کی رو سے ع - و + + ی ہے۔ پس اگر
مکمل کے مستقالات سے قطع نظر کی جائے تو مساوات (۲) درست ہے۔

$$\text{مثال کر} (۳ \text{ لا} - ۵ \text{ لا} + ۱) \text{فرلا} = \text{کر} ۳ \text{ لا} \text{فرلا} - \text{کر} ۵ \text{ لا} \text{فرلا} + \text{کر} ۱ \text{ فرلا}$$

(۲) کی رو سے

$$= ۳ \text{ کر} ۳ \text{ لا} \text{فرلا} - ۵ \text{ کر} ۳ \text{ لا} \text{فرلا} + \text{کر} ۳ \text{ فرلا} (۱) \text{ کی رو سے}$$

$$= \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵} \frac{۳}{۵}$$

تکملہ درحقیقت آزمائشی عمل ہے، اور اکثر اوقات ایسا ہوتا ہے کہ معلومہ تفاعلوں
میں سے کوئی ایسا تفاعل نہیں ملتا جس کا مشتق معلومہ تکملہ ہو دیکھو دفعہ ۸۲ حصہ
اول)۔ دفعات ۴، ۹ میں تکملہ کے دو عام طریقے دئے جائیں گے جو تکملوں کی

تلاش میں نہایت کارآمد ثابت ہوتے ہیں، لیکن یاد رہے کہ اکثر اوقات کسی سادہ سی جبر یہ یا مثلثی تحویل کی مدد سے تکمیل کو ایسی ارقام کے مجموعہ کی شکل میں لاسکنا ممکن ہوتا ہے کہ ہر ایک رقم معیاری صورت میں آجائے تکمیل کے بعض نتائج اس قدر اہم ہیں کہ انہیں معیاری صورتوں میں شریک کر لینا مناسب ہے، لیکن طالب علم کو چاہئے کہ الگ الگ نتائج کو حفظ یاد رکھنے کی بجائے نفس تحویل کے اہل منشا کو ذہن نشین کر لے۔ اب ہم ایسی تحویلوں کی چند مثالیں درج کرینگے۔

مثال ۱۔ $\frac{2}{1-2} - \frac{1}{1+2}$ کو تکمیل کرو۔

تقسیم سے $\frac{2}{1-2} - \frac{1}{1+2} = \frac{2}{1-2} - \frac{1}{1+2} = \frac{2}{1-2} - \frac{1}{1+2}$

تکملہ ہے $\frac{2}{1-2} - \frac{1}{1+2} = \frac{2}{1-2} - \frac{1}{1+2} = \frac{2}{1-2} - \frac{1}{1+2}$ لوک $(1-2)$

ہر ایک ایسی کسر کا تکمیل جس میں شمار کنندہ لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو اور نسبت لا کا خطی تفاعل ہو اسی طرح عمل میں آسکتا ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{1}{1-2} - \frac{1}{1+2}$ کو تکمیل کرو۔

اسکو جزوی کسروں میں تحلیل کرو

$$\frac{1}{1-2} - \frac{1}{1+2} = \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1+2}$$

$$\left\{ \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1+2} \right\} = \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1+2}$$

$$\frac{1-2}{1+2} \text{ لوک } \frac{1}{1-2} =$$

جبکہ لا < 1 کیونکہ صرف اسی صورت میں $\frac{1-2}{1+2}$ مثبت ہوگا۔ اگر

$$لا^۲ > ۱^۲ \text{ تو مکملہ } \frac{۱}{۲} \text{ لوک } \frac{لا-۱}{لا+۱} \text{ ہوگا کیونکہ اس صورت میں } \frac{۱}{لا-۱}$$

کا مکملہ لوک (۱-لا) ہے۔
یہ تحویل جزوی کسور کے طریقہ کی ایک خاص صورت ہے۔ اس کے تفصیلی مطالعہ کے لئے
طالب علم جبر و مقابلہ کی کوئی مستند کتاب دیکھے۔
ملاحظہ ہو دفعہ ۱۱۔

$$\text{چونکہ } \frac{۱}{۲-لا} + \frac{۲}{۱-لا} = \frac{۵-لا^۳}{(۲-لا)(۱-لا)}$$

$$\text{اس لئے } ۱ \text{ کے } \frac{(۵-لا^۳)}{(۲-لا)(۱-لا)} = ۲ \text{ لوک } (۱-لا) + \text{لوک } (۲-لا)$$

$$\text{مثال ۳۔ صورتیں } \frac{۱}{لا+ب+لا^۲} \text{ اور } \frac{۱}{لا+ب+لا^۳}$$

اگر ۱ اور ب دونوں مثبت ہوں تو

$$۱ \text{ کے } \frac{۱}{لا+ب+لا^۲} = \frac{۱}{لا} \text{ کے } \frac{لا}{لا+ب+لا^۲} = \frac{۱}{لا+ب} \text{ کے } \frac{لا}{لا+ب} \text{ کے } \frac{۱}{لا+ب} \text{ کے } \frac{لا}{لا+ب}$$

اگر ۱ منفی اور ب مثبت ہو تو مکمل ہو کو مثال ۲ کی شکل میں لانا چاہئے۔

$$\text{مثلاً } ۱ \text{ کے } \frac{۱}{لا+ب+لا^۳} = \frac{۱}{لا} \text{ کے } \frac{لا}{لا+ب+لا^۳} = \frac{۱}{لا+ب+لا^۲} \text{ کے } \frac{لا}{لا+ب+لا^۲}$$

اسی طرح $\frac{۱}{لا+ب+لا^۲}$ پر بھی عمل ہو سکتا ہے۔

$$۱ \text{ کے } \frac{۱}{لا+ب+لا^۳} = \frac{۱}{لا} \text{ کے } \frac{لا}{لا+ب+لا^۳} = \frac{۱}{لا+ب+لا^۲} \text{ کے } \frac{لا}{لا+ب+لا^۲}$$

ذرا سی مشق کے بعد طالب علم بہت سے مدارج زبانی کر سیکے پہلی صورت میں پورا

عمل یہ ہے

$$\frac{1}{b} \text{ کہ فرلا } = \frac{1}{b} \times \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{b} \times a = \frac{a}{b} \text{ کہ فرلا}$$

مثال ۴۔ جب لا، جم لا، جب م لا، جم ن لا
جس صورت میں ن چھوٹا مثبت صحیح عدد نہ ہو تو جب لا، جم لا یا سانی لا کے
اضغان کی جیوب یا جیوب الہام کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں، ن کی اور قیمتوں کے لئے
مسل نخل (دفعہ ۹) یا دفعہ ۵ مثال ۴ کے طریقہ کو استعمال کرنا زیادہ مناسب ہوگا۔
جب لا = $\frac{1}{4}$ (جم لا) جب لا = $\frac{3}{4}$ جب لا۔ $\frac{1}{4}$ جب م لا

$$م \text{ جب لا فرلا} = \frac{1}{4} \text{ لا۔} \frac{1}{4} \text{ جب م لا، کہ جب لا فرلا}$$

$$= - \frac{3}{4} \text{ جم لا} + \frac{1}{4} \text{ جم م لا}$$

$$\frac{1}{4} \text{ جب لا فرلا} = \frac{3}{4} \text{ کہ جب لا فرلا} = - \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right] = - \frac{1}{2}$$

اسی طرح جم لا کی قوتوں پر بھی عمل ہو سکتا ہے۔
جب اور جب الہام کے حاصل ضرب کو یا دو جیوب یا دو جیوب الہام کے حاصل ضرب
کو جیوب یا جیوب الہام کے حاصل جمع یا حاصل تفریق کی رقوم میں بیان کر کے مکمل کیا
جاسکتا ہے۔ مثلاً

$$\text{جب م لا، جم ن لا} = \frac{1}{4} \{ \text{جب (م+ن) لا} + \text{جب (م-ن) لا} \}$$

اس لئے اگر م = ن تو

$$\text{کہ جب م لا، جم ن لا فرلا} = - \frac{\text{جم (م+ن) لا}}{2} - \frac{\text{جم (م-ن) لا}}{2}$$

لیکن اگر م = ن تو مکمل ہے

$$= - \frac{1}{2} \text{ جم م لا}$$

مشق ۱

امثلہ آتا ۱۵ کو ملحوظ لا کے تکمل کرو۔

- ۱- $\frac{۳-۲۲+۲۲-۲}{۳-۲}$ - ۲- $\frac{۱+۲}{۱-۲}$
- ۳- $\frac{۲-۲}{۲+۲}$ - ۴- $\frac{۳-۲}{۳-۲}$
- ۵- $\frac{۱}{۲-۳}$ - ۶- $\frac{۱}{۲+۳}$
- ۷- $\frac{۱}{۳-۲}$ - ۸- $\frac{۱}{۳+۲}$
- ۹- جم لا - ۱۰- جم لا - ۱۱- جم (لا+ب)
- ۱۲- جب لا - ۱۳- جب ۳ لا جب ۴ لا
- ۱۴- جب (۲+۳) جم (۴+۳) - ۱۵- جم لا جم ۲ لا جم ۳ لا
- ۱۶- ۱۷- ۱۸- ۱۹- ۲۰- ۲۱- ۲۲- اگر م 'ن' نامادی مثبت صحیح عدد ہوں تو

مگر جم م لا جم ن لا فلا = ۰ مگر جب م لا جب ن لا فلا

اور ہر شکل کی قیمت معلوم کرو جبکہ م اور ن مساوی مثبت صحیح عدد ہوں۔
۲۳۔ متکملوں کی تریسوں سے دکھاؤ کہ ذیل کی مساواتیں درست ہیں

$$(۱) \quad \text{م} \times \text{ج} = \text{لا} \times \text{فرلا} = \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} \times \text{جہاں} \times \text{ن} \times \text{مثبت ہے}$$

$$(۲) \quad \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} = \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} \times \text{جہاں} \times \text{ن} \times \text{مثبت ہے}$$

$$(۳) \quad \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} = \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} \times \text{اگر ن جفت صحیح عدد ہو}$$

لیکن $\text{اگر ن طاق صحیح عدد ہو}$
۲۴۔ مکانی ما = ۲ لا اور نقطہ (ب، ج) میں سے گزرنیوالے دوہرے
معیں کے درمیان جو رقبہ محدود ہے وہ $\frac{۲}{۳}$ سبج کے مساوی ہے۔

۲۵۔ (ا، ب) مثبت ہیں اور (ا، ب) ثابت کرو کہ جو رقبہ نام لا ما = ج ۲،
محور لا اور (ا، ب) پر کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ ج لوک (ب) کے
مساوی ہے۔ اگر انا کی بجائے معلوم نہی ما = $\frac{۲}{۳}$ ہو تو رقبہ

(ب) ۱ + ۱ = ۲ (ا + ۱) / ج ۱ + ۱ ہوگا۔
۲۶۔ ثابت کرو کہ موسیقی نہی ما = ب جب (ب) کے ایک محراب اور محور لا کے
درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ ۲ ب کے مساوی ہے۔

۲۷۔ ناقص اپنے محور اعظم کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ ایک پوری گردش سے جس
گرد نامی کو یوں ہوتی ہے اس کا حجم $\frac{۲}{۳}$ ب ہے۔ اگر گردش کا محور محدود و صغر ہو تو
حجم $\frac{۲}{۳}$ ب ہوگا۔

۲۸۔ بعض سطحوں کو اگر ایک ایسے نقطہ پر جس کا فاصلہ لا ہے محور لا پر عموداً تراشا جائے تو
تراش کا رقبہ ۱ + ب لا + ج لا ہو تا ہے جہاں (ا، ب) ج مستقل ہیں،
ثابت کرو کہ دو متوازی سطحوں کے درمیان جو محور لا پر عموداً ہیں ان سطحوں کا حجم
(ب - ا) + (ا + ب) (ب - ا) + (ا + ب) ج (ب - ا) منقطع ہو گا ہے۔

جہاں Δb ان نقطوں کے فاصلے ہیں جہاں مستویات محور کا کوکٹھی ہیں ($\Delta > b$)
اس نتیجہ کو ذیل کے حجم معلوم کرنے میں استعمال کرو۔

(۱) مخروط کا حجم (۲) قطعہ کرہ کا حجم (۳) ناقص نما کا حجم جس کی مسادرت

$$\frac{\Delta^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{b\Delta}{2} = 1 \text{ ہے۔}$$

۲۹۔ مثال ۲۸ میں فرض کرو کہ Δb اور Δ کے درمیانی نقطہ میں سے گزرنیوالی تہوں
کے رقبے بالترتیب V_1 ، V_2 اور V_3 ہیں اور $b = 1$ ، $\Delta = 2$ ثابت کرو کہ حجم کو
 $\frac{1}{6} \pi (V_1 + V_2 + V_3)$ ہے۔

۴۔ متغیر کی تبدیلی۔ دفعہ ۵ حصہ اول میں تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنا

کلیہ بتایا گیا ہے۔ اسی کلیہ سے مکمل کا ایک مشہور طریقہ حاصل ہوتا ہے، دفعہ گذشتہ میں جن دو عام طریقوں
کا ذکر کیا گیا ہے ان میں سے یہ ایک ہے۔ اس کلیہ کی رو سے مکمل کے متغیر کو بدل کر مکمل عمل میں
لائے ہیں۔ سب سے پہلے سادہ سی مثال لو

$$Ma = \int \frac{F(x)}{\Delta^2 + 2\Delta + 2} dx, \quad F(x) = \frac{1}{\Delta^2 + 2\Delta + 2}$$

رکھو $\Delta = x - 1$ اس طرح Ma کا تفاعل بن جاتا ہے۔

$$\frac{1}{\Delta^2 + 2\Delta + 2} = \frac{1}{(\Delta + 1)^2 + 1} = \frac{F(x)}{F(x)} \times \frac{F(x)}{F(x)} = \frac{F(x)}{F(x)}$$

اب اوپر کا متحدہ کا تفاعل ہے اور یہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$Ma = \int \frac{F(x)}{1 + x^2} dx = \text{مس}^{-1} Ma = \text{مس}^{-1} (\Delta + 1)$$

متغیر کو بدلنے سے ہم مکمل کو ایک معلومہ شکل میں لے آئے ہیں، اس طرح مکمل آسان ہو گیا ہے
اب عام صورت پر غور کرو جہاں مکمل $F(\Delta)$ ہے۔ فرض کرو کہ ابال $\Delta = F(x)$
کی مدد سے Ma کو Δ کا تفاعل بنایا گیا ہے تب

$$\frac{F(x)}{F(x)} = \frac{F(x)}{F(x)} \times \frac{F(x)}{F(x)} = F(\Delta) \cdot \frac{F(x)}{F(x)} \dots \dots \dots (1)$$

مساوات (۱) میں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو لا = فد (ع) سے معلوم کرو اور پھر نئے متکمل
 فادرلا) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو اسی مساوات کے ذریعہ ع کی رقوم میں بیان کرو۔ اس طرح مساوات
 (۱) لا سے پاک ہو جائیگی اور حاصل ہوگا

$$\text{ما} = \text{م فادرلا) } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{ فرع} \dots\dots\dots (۲)$$

یہ ممکن ہے کہ نیا متکمل جو اوپر حاصل ہوا ہے معیاری صورت میں ہو یا اگر ایسا نہ ہو تو بہ نسبت
 پرلے متکمل کے یہ زیادہ آسانی سے ایسی صورت میں تحویل ہو سکے، پس

$$\text{ما} = \text{م فادرلا) } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} = \text{م فادرلا) } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{ فرع} \dots\dots\dots (۳)$$

الفاظ میں متغیر کو بدلنے کا قاعدہ یوں بیان ہو سکتا ہے۔

فرلا کی بجائے (فرلا) فرع رکھو اور لا اور ع کے درمیان جو مساوات ہے
 اس کے ذریعہ نئے متکمل فادرلا) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو ع کی رقوم میں بیان کرو۔ اس طرح تکملہ
 نئے متغیر کا تفاعل بن جائیگا۔
 جب تکمل کا عمل اس طرح پورا ہو چکے تو تکملی تفاعل کو پرلے متغیر کی رقوم میں واپس
 لے آنا چاہیے۔

جب لا = ا تو ع = ع اور جب لا = ب تو ع = ب اور اگر لا = ع کا باہمی
 ربط ایسا ہو کہ جب لا = ا سے ب تک مسلسل طور پر بدلے تو ع بمی ع سے بدلتا
 مسلسل طور پر بدلتا ہو تو

$$\text{م فادرلا) } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} = \text{م فادرلا) } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{ فرع} \dots\dots\dots (۴)$$

ظاہر ہے کہ اس صورت میں پرلے متغیر کی طرف واپس آنے کی ضرورت نہیں۔

اوپر کے استحالوں (۳) اور (۴) کے استعمال کرنے میں یہ ضروری ہے کہ مکمل کے وقتوں
ب۔ ۱ اور ب۔ ۲ کے درمیان لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ع کی ایک اور
صرف ایک قیمت ہو اور اسی طرح ع کی ہر ایک قیمت کے جواب میں لا کی ایک اور
ایک قیمت ہو، اگر لا اور ع کا باہمی ربط ایسا ہو کہ اس سے ع، لا کے کثیر القیمت تفاعل
کے طور پر حاصل ہو یا لا، ع کے کثیر القیمت تفاعل کے طور پر ملے تو اضیاء سے مناسب
قیمت کا انتخاب کرنا چاہیے۔ [ملاحظہ ہو دفعہ ۸، مثال ۳ اور دفعہ ۱۴]

۵۔ متغیر بدلنے کی مثالیں

مثال ۱۔ جب، فا (لا) اس شکل سا (لا + ب) کا ہو
فرض کر کہ $ع = لا + ب$ ، فرع = لا، فرلا = $\frac{1}{ع}$ فرع
کی سا (لا + ب) فرلا = $\frac{1}{ع}$ کی سا (ع) فرع
یہ نمونہ اکثر واقع ہوتا ہے۔ مثلاً اگر $ع = لا - \frac{1}{ع}$ تو

$$\frac{فرلا}{ع} = \frac{1}{ع} \text{ کی } (لا - \frac{1}{ع}) = \frac{فرلا}{ع + \frac{1}{ع}} \text{ کی } \frac{1}{ع} = \frac{فرلا}{ع + \frac{1}{ع}}$$

$$= \frac{1}{ع} \times \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع} = ۱ \text{ مست } (لا - \frac{1}{ع})$$

$$\text{کی } \frac{فرلا}{ع} = \frac{1}{ع} \text{ کی } (لا - \frac{1}{ع}) = \frac{فرلا}{ع + \frac{1}{ع}} \text{ کی } \frac{1}{ع} = \frac{فرلا}{ع + \frac{1}{ع}}$$

مستقل جزو ضروری مثلاً ۲ حسب ضرورت تکمیلی علامت کے باہر نکال لیا جاسکتا ہے اسی طرح

اگر ضرورت ہو تو مستقل جزو ضروری داخل کر لیا جاسکتا ہے جیسا مثال ۳ میں۔

مثال ۲۔ جب، فا (لا) اس شکل سا (لا) کا ہو۔

$$\text{فرض کر کہ } ع = لا، \text{ فرع} = ن لا، \text{فرلا} = لا، \text{فرع} = ن$$

$$\text{کی سا (لا) لا} = \frac{1}{ع} \text{ کی سا (ع) فرع}$$

پس جب، $e = 1$

$$\text{سار لا}^2 + \text{ب} = \frac{1}{2} \text{سار}^2 + \text{ع} + \text{ب} = \frac{1}{3} \text{سار}^2 + \text{ع} + \text{ب} = \frac{1}{4} \text{سار}^2 + \text{ع} + \text{ب}$$

$$d_3 / \#(d_1 + d_2) =$$

اس نکتہ کی قیمت اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے اگر رکھا جائے $ع = ا + ب$
یا $ع = ا + ب$ ۔ موخر الذکر امداد سے

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ اور } \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} \text{ لافلا } = \frac{1}{x} \text{ لافلا } = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} \text{ لافلا}$$

جو قیمت اور معلوم ہوئی ہے۔

مثال ۳۔ جب فار (لا) اس شکل [سا (لا)] سَا (لا) کا ہو

فرض لو کہ $6 = سہ (لا)$ ، فرع = سہ (لا) فلا

فَا (لا) فِرْلَا = ع^و فِرْع

اور مکملہ قوت کی شکل میں ہوگا اگر '۔ ا کے مساوی نہ ہو اور یوں کہ تم کی شکل میں ہوگا

اگر ن = ۱

(۱۳) $\int [S(a)]^n [S'(a)]^m dx = \frac{1}{n+1} [S(a)]^{n+1} [S'(a)]^m - \frac{m}{n+1} \int [S(a)]^n [S'(a)]^{m-1} dx$

(۳۲) $\int \frac{S_1(x)}{S_2(x)} dx = \text{فر} = \text{لوک} [S_1(x)]$

(۲ ب) ہے ہم دیتے ہیں کہ جب متکمل ایک کسے ہو جس کا شمار کنندہ نبی ناما کا مشتق ہے تو اس کا مکمل نسب ناما کو کا رقم ہوتا ہے۔

بعض اوقات فنکشن کو مثال سہمی شکل میں لانیکے لئے ایک مستقل جزو ضربی کا ترکیب کرنا ضروری ہوتا ہے۔ مثلاً ذیل کے سوالوں میں

$$\frac{1}{r} = \frac{y^2(1-y)}{(1+y r^2 - y)r} \int \frac{1}{r} = \frac{y^2(1-y)}{(1+y r^2 - y)r} \int (1)$$

$$\sqrt{1 + 2r - 2r^2} \cdot \frac{1}{r} =$$

$$(۲) \int \frac{(لا + ع) فرلا}{(لا + ع) + ۱} = \frac{۱}{۲} \text{ لوک } \{ (لا + ع) + ۱ \}$$

$$(۳) \int \text{مس لا فرلا} = - \int \frac{\text{جب لا فرلا}}{\text{جم لا}} = - \text{لوک جم لا} = \text{لوک قطا لا}$$

$$(۴) \int \text{مس لا فرلا} = \int \text{مس لا (قطا لا - ۱) فرلا} = \int \text{مس لا قطا لا فرلا} - \int \text{مس لا فرلا} \\ = \frac{۱}{۲} \text{مس لا} + \text{لوک جم لا}$$

مثال ۴۔ فارلا = جب لا جم لا
(۱) اگر م، ن میں سے کوئی ایک بھی طاق مثبت صحیح عدد ہو تو مکمل باسانی عمل میں آسکتا ہے۔ جب م، ن طاق ہو تو رکھو ع = جم لا اور جب م، ن طاق ہو تو رکھو ع = جب لا۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ فارلا = جب لا جم لا
رکھو ع = جب لا، فرع = جم لا فرلا، جم لا = (۱ - ع) (۲)

$$\int \text{جب لا جم لا فرلا} = \int (ع - ع^۲ + ع^۳ - ع^۴ + \dots) \text{فرع} = \int (ع - ع^۲ + ع^۳ - ع^۴ + \dots) \frac{۱}{۲} =$$

$$= \text{جب لا} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۸} + \dots \right) = \text{جب لا} \left(\frac{۱}{۲} \right)$$

$$\int \text{جب لا جم لا فرلا} = \int (ع - ع^۲ + ع^۳ - ع^۴ + \dots) \text{فرع} = \int (ع - ع^۲ + ع^۳ - ع^۴ + \dots) \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

اسی طرح سے اگر ع = جم لا، فرع = جب لا دلا

$$\int \text{جب لا فرلا} = - \int (۱ - ع) \text{فرع} = - \int (ع - ع^۲ + ع^۳ - ع^۴ + \dots) = - \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \dots \right)$$

$$= - \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \dots \right) = - \frac{۱}{۲}$$

(۲) جب م، ن جفت، منفی صحیح عدد ہو۔ ایسی صورت میں فرض کرو کہ

$$ع = \text{مس لا (یا کم لا)}، \text{یا مکمل مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جاسکیگا مثلاً}$$

$$\int \frac{\text{ولا}}{\text{جب لا جم لا}} = \int \frac{(۱ + ع^۲)}{ع} = \int \left(\frac{۱}{ع} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \dots \right) \text{فرع}$$

اور مکمل باسانی لاگتی رقوم میں مائل ہو سکتا ہے۔

مثال ۵۔ اگر ف (لا) لا اور لا (لا) ب کا منطق تفاعل ہو تو تعویض یا ابدال لا (لا) ب = ع سے نیا شکل ع کا منطق تفاعل بن جائیگا۔
مثلاً اگر لا (لا) = ا = ع تو

$$ک لا لا (لا) ا فلا = ۲ ک (۱ - ۶) ۲ ع فر ع = ۲ (۱ - ۶) ۲ ع + ۶ + ۶ + ۶$$

اور تو ٹی سی تحویل کے بعد = ۲ لا (لا) ا (۱۵ لا + ۳ لا - ۲ لا + ۸ لا) ۱۰۵ علم
اوپر کی مثالوں میں متغیر بدلنے کی ابتدائی شہور صورتیں جو اکثر واقع ہوتی ہیں حل کی گئی ہیں مطالب علم
ان کا غور سے مطالعہ کرے اور اس کے بعد شق ۲ کے اوائل کی مثالوں کے حل کرنے کی
کوشش کرے۔ کافی شق ہم پہچانے سے ہی اسکے لئے ایسی تحویلوں کے استعمال میں بہولت
پیدا ہو سکتی ہے۔

۶۔ دوسرے درجہ کے تفاعل۔ اگر س = لا (لا) ب لا + ج اور
ف (لا) ایک منطق صحیح تفاعل ہو تو ف (لا) سر ایک ایسے مجموعہ کی شکل میں بیان

ہو سکتا ہے جو ایک منطق صحیح تفاعل اور ایک کسر واجب $\frac{لا + ب}{سر}$ پر مشتمل ہو۔

اہم ان شکلوں $\frac{لا + ب}{سر}$ اور $\frac{لا + ب}{سر}$ پر بحث کرنیگے۔

مبتدیوں کے لئے آسانی اس میں ہوگی کہ س کو ذیل کی صورت میں لکھا جائے

$$س = لا (لا + ب) + ۲ (۱ - ج) - ب$$

اگر مثبت ہو تو اسے ہم + کے مساوی لے سکتے ہیں اور اگر منفی ہو تو اسے - کے
مساوی لیا جاسکتا ہے، ایسا کرنے میں حل کی عمومیت میں فرق نہیں آتا کیونکہ مستقل جزو ضربی
ہمیشہ تکملی علامت کے باہر نکال لیا جاسکتا ہے۔

اگر ۲ (۱ - ج) - ب مثبت ہو تو سر کے اجزائے ضربی خیالی ہوں گے اور س
اس شکل کا ہوگا

س = (لا + عہا) + بہا (۱۰)
اگر ۴ رج - ب منفی ہو تو س کے اجزائے ضربی حقیقی ہونگے اور اگر

$$۱ = ۱ + ۱ \text{ تو } س = (لا + عہا) - بہا \dots\dots\dots (۲)$$

$$۱ = ۱ - ۱ \text{ تو } س = بہا - (لا + عہا) \dots\dots\dots (۳)$$

صورت اول - لا + ب

(۱) اگر س کے اجزائے ضربی حقیقی ہوں تو اس کسر کو دفعہ ۳ مثال ۲ کی مانند جزوی کسروں میں تحلیل کیا جائے -

(۲) اگر س کے اجزائے ضربی خیالی ہوں تو س = (لا + عہا) + بہا، ہم اس صورت میں کسر کو اس طرح بدل سکتے ہیں کہ دفعہ ۵ مثال ۳ اور مثال ۱ کی طرح متغیر بدلنے سے حل عمل میں آ سکے -

لہ اور مہا ایسے معلوم کرو کہ

$$لا + ب = لہ (۲ + لا + عہا) + مہا (۱) = لہ (۱) + مہا (۲ + لا + عہا)$$

$$\text{اس لئے } \frac{لا + ب}{س} = \frac{لہ (۲ + لا + عہا) + مہا (۱)}{س} = \frac{لہ (۲ + لا + عہا)}{س} + \frac{مہا (۱)}{س}$$

اور $\frac{لا + ب}{س} = \frac{لہ (۲ + لا + عہا)}{س} + \frac{مہا (۱)}{س}$ فرلا = لہ لوک { (لا + عہا) + بہا } + مہا س (لا + عہا) بہا
پہلا حکمہ دفعہ ۵ مثال ۳ کی صورت ہے اور دوسرا دفعہ ۵ مثال ۱ کی -

صورت دوم - لا + ب

(۱) س فرض کرو کہ (لا + عہا) + بہا ہے یا (لا + عہا) - بہا

لا + ب کے لئے اور یہی تحلیل عمل میں لاؤ

$$س (لا + ب) = فرلا = لہ (۲ + لا + عہا) + مہا (۱) = لہ (۲ + لا + عہا) + مہا (۱)$$

$$= لہ (۲ + لا + عہا) + مہا لوک { (لا + عہا) + بہا } + مہا (۱) = لہ (۲ + لا + عہا) + مہا (۱) + مہا (۱)$$

(۲) فرض کرو کہ $س = یبا - (لا + عا) ۲$ تب

$$\int \frac{(لا + جب) فرلا}{س} = - \int \frac{لا}{س} - \int \frac{(لا ۲ + لا ۲ عا + عا ۲) فرلا}{س} + \int \frac{مدا}{س} - \int \frac{یبا - (لا + عا) ۲}{س}$$

$$= - \int \frac{لا ۲}{س} + \int \frac{مدا جب - (لا + عا) ۲}{س}$$

جب $۱ = ۱$ ۔ تو $لا = ۱$ ۔ تو تکمیل دفعہ ۵ مثال ۱ کے نمونہ کی ہے۔
 عددی مثالوں کے حل کرنے میں سب سے پہلے $س$ کا مشتق معلوم کر لینا چاہئے، اس کے بعد $لا + جب$ کو مطلوب شکل میں رکھ لینا آسان ہوگا۔

$$\text{مثال ۱-} \int \frac{(۱ + لا ۳) فرلا}{۳ + لا ۲ + لا ۲}$$

$$\text{حلی} (۲ + لا ۲ + لا ۲) = ۳ + لا ۲ + لا ۲ = ۱ + لا ۳ + لا ۲ + (۱ + لا ۲) + \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۴}$$

$$۲ + لا ۲ + لا ۲ = ۳ + لا ۲ + \left\{ \frac{۲۳}{۱۶} + \left(\frac{۱}{۴} + لا ۲ \right) \right\}$$

$$\text{تکمیلہ} = \frac{۳}{۴} \int \frac{(۱ + لا ۲) فرلا}{۳ + لا ۲ + لا ۲} + \frac{۱}{۴} \int \frac{فرلا}{۳ + لا ۲ + لا ۲} + \frac{۲۳}{۱۶} \int \frac{فرلا}{۳ + لا ۲ + لا ۲}$$

$$= \frac{۳}{۴} \text{ لوگ } (۲ + لا ۲ + لا ۲) + \frac{۱}{۲۳۱۲} \text{ مس } (۱ + لا ۲) - \frac{۲۳}{۲۳۱۲}$$

$$\text{مثال ۲-} \int \frac{(۱ + لا ۳) فرلا}{۳ + لا ۲ + لا ۲}$$

$$۲ + لا ۲ = ۱ + لا ۲ + لا ۲ = \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴} + (۱ + لا ۲) + \frac{۱}{۴}$$

$$۲ + لا ۲ + لا ۲ = ۳ + لا ۲ + لا ۲ = \frac{۲۵}{۱۴} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}$$

$$\text{تکمیلہ} = - \frac{۳}{۴} \int \frac{(۱ + لا ۲) فرلا}{۳ + لا ۲ + لا ۲} + \frac{۱}{۲۱۴} \int \frac{فرلا}{۳ + لا ۲ + لا ۲} - \frac{۲۵}{۱۴} \int \frac{فرلا}{۳ + لا ۲ + لا ۲}$$

$$= -\frac{۳}{۲} - \sqrt{۲ - ۲لا + ۳} + \frac{۴}{۲۱۲} \text{ جب } \left(\frac{۱-۲}{۵} \right)$$

یہ نمونے $\frac{۱}{لا + لا + ب + لا + ج}$ ، $\frac{۱}{(م + لا + ن) لا + لا + ب + لا + ج}$ اور
 اوپر کی صورتوں میں تخیل ہو جائیگے اگر متغیر کو بالترتیب ان روابط $لا = \frac{۱}{ع}$ اور

$م + لا + ن = \frac{۱}{ع}$ کے ذریعہ بدلا جائے۔ نوکارتی تفریق سے ان سے حاصل ہوگا
 $\frac{فر لا}{لا} = -\frac{فر ع}{ع}$ اور $\frac{فر لا}{م + لا + ن} = -\frac{۱}{م} \frac{فر ع}{ع}$
 لا کی بجائے $\frac{۱}{ع}$ لکھ کر متغیر کا بدلہ اور صورتوں میں بھی سودمند ہوتا ہے، مثلاً

$$\int \frac{فر لا}{(۲لا + ۲) ۴} = -\int \frac{ع فر ع}{۴(۱ + ۲ع) ۴} = \frac{۱}{۴(۱ + ۲ع) ۴} \frac{۱}{لا}$$

لا کی رقم میں بیان کرنے سے

$$\frac{۱}{۴(۲لا + ۲) ۴} =$$

زیادہ عام صورت $\frac{۱}{(لا + لا + ب + لا + ج) ۴}$ اسی طرح حل ہو سکی اگر اردو دجی جملہ کو اس
 شکل میں بیان کر لیا جائے جو اس دفعہ کے شروع میں دی گئی ہے۔

۷۔ **مشنتی اور زائدی ابدال**۔ دوسرے درجہ کے تفاعل کے ساتھ عمل کرنا
 ایک اور طریقہ یہ ہے کہ مشنتی یا زائدی ابدال کے ذریعہ اسے تخیل کیا جائے،
 تفاعل کی شکل سے مناسب تخیل کا پتہ چلیگا۔

۱۔ $لا - لا - لا - لا = لا$ جب $طہ$ یا $لا = لا$ رجم $طہ$
 $لا + لا - لا - لا = لا$ رجم $طہ$ یا $لا = لا$ رجم $طہ$
 $لا - لا - لا - لا = لا$ رجم $طہ$ یا $لا = لا$ رجم $طہ$
 ۲۔ $لا + لا + لا + لا = لا$ جب $طہ$ یا $لا = لا$ رجم $طہ$ وغیرہ
 مثال ۱۔ اگر $لا = لا$ جب $طہ$ ، $فر لا = لا$ رجم $طہ$ فر $طہ$

$$\text{ک} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} - \text{ا} \text{ا} \text{فرلا} = \text{ا} \text{ا} \text{ک} \text{جم} \text{طہ} \text{فرطہ} = \frac{1}{4} (\text{طہ} + \text{جب} \text{طہ} \text{جم} \text{طہ}) \end{array}$$

$$\text{اس لئے ک} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} - \text{ا} \text{ا} \text{فرلا} = \frac{1}{4} \text{لا} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} - \text{ا} \text{ا} \end{array} + \frac{1}{4} \text{ا} \text{ا} \text{جب} \text{ا} \text{ا} \end{array}$$

مثال ۲۔ اگر لا = ا جب طہ طہ ، فرلا = ا جب طہ طہ فرطہ

$$\text{ک} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ا} \text{فرلا} = \text{ا} \text{ا} \text{ک} \text{جم} \text{ا} \text{طہ} \text{فرطہ} = \frac{1}{4} (\text{طہ} + \text{جب} \text{طہ} \text{جم} \text{طہ}) \end{array}$$

$$\text{اس لئے ک} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ا} \text{فرلا} = \frac{1}{4} \text{لا} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ا} \end{array} + \frac{1}{4} \text{ا} \text{ا} \text{جب} \text{ا} \text{ا} \end{array}$$

نیز اگر لا = ا جب طہ طہ تو

$$\text{ک} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} - \text{ا} \text{ا} \text{فرلا} = \frac{1}{4} \text{لا} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} - \text{ا} \text{ا} \end{array} - \frac{1}{4} \text{ا} \text{ا} \text{جم} \text{ا} \text{ا} \end{array}$$

مثال ۳۔ اگر لا + ۲ = ۳ مس طہ طہ تو فرلا = ۳ ق ط طہ فرطہ

$$\text{ک} \begin{array}{l} \text{فرلا} \\ \text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ا} \end{array} = \frac{\text{ا} \text{ا} \text{ق ط طہ} \text{فرطہ}}{\text{ا} \text{ا} \text{ق ط طہ}} = \frac{\text{ا} \text{ا} \text{ق ط طہ} \text{فرطہ}}{9} \text{ک} \text{جم} \text{طہ} \text{دطہ}$$

$$= \frac{1}{9} \left(\frac{\text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ا}}{\text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ا} + \text{ا} \text{ا}} + \frac{\text{ا} \text{ا}}{18} \text{مس} \begin{array}{l} \text{ا} \text{ا} \\ \text{ا} \text{ا} \end{array} \right)$$

محدود تکملوں کی صورت میں مثلی ابدال نہایت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔
۸۔ مثلی متکمل۔ جیسے جیسا تمام کی قوتوں اور عامل ضروری کا مکمل دفعہ ۳ مثال ۵، دفعہ ۴ مثال ۴ اور دفعہ ۱۰ مثلاً ۲، ۳ کے طریقوں سے عمل میں آسکتا ہے۔ لیکن ایک اور طریقہ بھی ہے جو اکثر مفید ثابت ہوتا ہے۔ جب تکمل جب لایا جم لا کا منطبق تفاعل ہو تو ابدال ۶ = مس ۱/۲ کے ذریعہ تکمل ۶ کے منطبق جبرۃ تفاعل میں تحویل ہو سکتا ہے۔
کیونکہ

$$\text{جب لا} = \frac{62}{6+1} \text{، جم لا} = \frac{6-1}{6+1} \text{، فرلا} = \frac{2}{6+1}$$

صورت دوم ایسی ضروری نہیں جیسی (۱)، مکملہ (۱) کی قیمت ایک اور شکل میں لکھی جاسکتی ہے جیسے یاد رکھنا آسان ہے، ملاحظہ ہو حسب ذیل۔

$$\text{رکھو } ط = ۲ \text{ مس } \frac{۱}{۳} \times \sqrt{\frac{۱-ب}{۱+ب}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{اس سے} \end{array} \right.$$

$$\text{جم } ط = \frac{۱+ب}{۱+ب+جم لا} \text{ یا } (۱-ب \text{ جم } ط) (۱+ب \text{ جم لا}) = ۱-ب$$

اگر ایک قطع ناقص ہو جس کا خروج مرکز $\frac{۱}{۳}$ ہے تو لا اس کا اصلی اور ط خارجہ مرکز زاویہ بیضا علی ہے۔ (ملاحظہ ہو کوڈ فرمے کی کتاب علم ہیئت دفعہ ۱۸۶،

گرمے کا رسالہ طبعیات دفعہ ۵۲۰)

۱+ب جم لا، اپنی قیمتوں کی پوری سمت میں سے گزر جاتا ہے جبکہ لا، صفر سے

π تک بدلتا ہے یا - π سے صفر تک منفی قیمتوں میں سے ہوتا ہوا بدلتا ہے۔ اگر لا صفر

اور π کے درمیان رہے تو ط مثبت ہوتا ہے اور صفر تا π کے درمیان واقع ہوتا ہے،

لیکن اگر لا - π اور صفر کے درمیان واقع ہو تو ط منفی ہوتا ہے اور - π اور صفر کے درمیان

واقع ہوتا ہے اسلئے مقلوب جب تمام پر جو قید (دفعات ۲۸، ۲۹، ۳۰) لگی گئی ہے اسکو ملحوظ رکھتے ہوئے

$$\text{فر لا} = \frac{۱}{۱-ب+جم لا} \text{ جم } \frac{۱}{۱+ب+جم لا} \text{ اگر } ۱ \geq لا \geq \pi$$

$$\text{لیکن } \frac{۱}{۱-ب+جم لا} \text{ جم } \frac{۱}{۱+ب+جم لا} \text{ اگر } -\pi \leq لا \leq ۰$$

جب مکملہ کو فاس مقلوب کی رقم میں لیا جائے تو ایسا اشتباہ واقع نہیں ہوتا۔

$$\text{مثال ۴- } ۱ \text{ } ۱+ب \text{ جم لا، مثبت } - \frac{\pi}{۲} > لا > \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{مکملہ } = \frac{۲ \text{ فرع}}{۲+۱+۲+۱+۲+۱}$$

اگر $ب > ۱$ تو ربط لا = $\frac{\pi}{۲}$ - و یا لا = $\frac{\pi}{۲}$ + وئے مکملہ مثال ۳ (۱) میں

تعمول ہو جائیگا۔ طالب علم کو یہ دونوں ابدال عمل میں لانا چاہئیں۔ اس طرح اُسے معلوم

ہوگا کہ ط کی صرف ایک قیمت کو ہی جو جم ط سے حاصل ہوتی ہے ملحوظ رکھنا کافی نہیں

$$\begin{array}{rcl}
 ۱۳- & \text{مس لا} & ۱۲- \text{م لا} \quad ۱۵- \text{وجم لا + ب جب لا} \\
 ۱۶- & \text{جب لا} & ۱۷- \text{جب لا جم لا} \quad ۱۸- \text{جب لا جم لا} \\
 ۱۹- & \text{جب لا} & ۲۰- \text{لا لا لا} \quad ۲۱- \text{لا لا لا}
 \end{array}$$

۲۲-

$$\frac{۱}{۱+۱-۱}$$

۲۳- ذیل کے مکملوں کی قیمتیں دیانت کر

$$(۱) \text{ م جب لا فرلا} \quad (۲) \text{ م جب لا جم لا فرلا} \quad (۳) \text{ م جب لا جم لا + ب جب لا فرلا}$$

$$(۴) \text{ م جب لا جم لا فرلا} \quad (۵) \text{ م مس لا فرلا} \quad (۶) \text{ م ۱ + لا + لا فرلا}$$

$$(۷) \text{ م جب لا فرلا} \quad (۸) \text{ م ۱ + جم لا فرلا}$$

اشد ۲۴ تا ۲۸ کو بخانہ لا کے مکمل کر دو

$$۲۴- \frac{۱+۱}{۱+۱+۱} \quad ۲۵- \frac{۱-۱}{۱+۱} \quad ۲۶- \frac{۱+۱}{۱+۱+۱}$$

$$۲۷- \frac{۱+۱}{۱-۱} \quad ۲۸- \frac{۱+۱}{۱-۱} \quad ۲۹- \frac{۱+۱}{۱-۱}$$

$$۳۰- \frac{۱+۱}{۱-۱} \quad ۳۱- \frac{۱+۱}{۱-۱} \quad ۳۲- \frac{۱+۱}{۱-۱}$$

$$۳۳- \frac{۱}{۱+۱+۱} \quad ۳۴- \frac{۱}{۱+۱+۱} \quad ۳۵- \frac{۱}{۱+۱+۱}$$

$$-۳۶ \quad \frac{1}{(۱+۱۲-۱۲)} \quad -۳۷ \quad \frac{1}{(۱-۱۲-۱۲)} \quad -۳۸ \quad \frac{1}{(۱+۱۲+۱۲)}$$

$$-۳۹ \quad \frac{1}{(۱+۱۲+۱۲)} \quad -۴۰ \quad \frac{1}{۱+۱۲} \quad -۴۱ \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲}$$

-۴۲ ذیل کے مکملوں کی قیمتیں دریافت کرو

$$(۱) \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲} \quad (۲) \quad \frac{۱}{۱+۱۲} \quad (۳) \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲}$$

$$(۴) \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲} \quad (۵) \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲} \quad (۶) \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲}$$

$$(۷) \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲} \quad (۸) \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲} \quad (۹) \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲}$$

$$-۴۳ \quad \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲} \quad \text{جب حد فرلا کی قیمت دریافت کرو}$$

$$(۱) \quad \text{جبکہ } ۱۱ > ۱۲ > ۱۱ \quad (۲) \quad \text{جبکہ } ۱۱ > ۱۲ > ۱۱$$

$$-۴۴ \quad \text{اگر مثبت ہو اور ب تعداد کم ہو د سے تو ابدال جم طہ = } \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲}$$

$$\text{قریب ثابت کرو کہ } \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲} = \frac{۱}{۱+۱۲+۱۲}$$

$$-۴۵ \quad \text{جو منحنی مساوات } ۱ = ۱ = ۱ \text{ سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو اور اس کے$$

علقہ کا رقبہ دریافت کرو۔

$$-۴۶ \quad \text{جو منحنی مساوات } ۱ = ۱ = ۱ \text{ سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو اور اس کے}$$

دونوں حلقوں کا رقبہ دریافت کرو۔

$$-۴۷ \quad \text{جس منحنی کی قطبی مساوات } ۱ = ۱ + ۱ + ۱ \text{ جم طہ ہے اُسے مرتسم کرو}$$

۱ < ۱ < ۱۔ اور جو رقبہ گھیرتا ہے اُسے محسوب کرو۔

$$-۴۸ \quad \text{ایک قطع ناقص کی کارٹیزی مساوات } ۱ = ۱ + ۱ + ۱ \text{ ہے اُسے}$$

اسکو قطبی محدودوں میں تحویل کر کے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

$$\text{رقبہ} = ۲ \times \frac{1}{4} \times \text{فرطہ} = \frac{۲}{۴} \times \text{فرطہ} = \frac{۱}{۲} \times \text{فرطہ}$$

$$\text{فرطہ} = \frac{۲}{۴} \times \text{فرطہ} = \frac{۱}{۲} \times \text{فرطہ}$$

$$\text{فرطہ} = \frac{۲}{۴} \times \text{فرطہ} = \frac{۱}{۲} \times \text{فرطہ}$$

۹۔ تکمل بالخصص۔ تکمل کا دوسرا عام طریقہ ہے جسے ہم ”تکمل بالخصص“ کہیں گے۔ یہ مسئلہ ماہل ضرب کے تفرق کے مسئلہ کے مثل ہے اگر ہم تکمل کو لاحقہ سے اور تفرق کو زبور سے تعبیر کریں، مثلاً

$$ع = ع \times ع \text{ فرلا} = ع = \frac{ع}{ع}$$

نو حاصل ضرب کو تفرق کرنے کے قاعدہ کے موافق

$$\text{فر (ع، ع)} = \frac{ع}{ع} = ع + ع \text{ فرلا}$$

$$\text{یعنی فر (ع، ع)} = ع + ع \text{ فرلا} = ع + ع \text{ فرلا} = ع + ع \text{ فرلا}$$

$$\text{پس } ع + ع = ع (ع + ع) \text{ فرلا} \dots \dots \dots (۱)$$

$$ع + ع \text{ فرلا} = ع + ع \text{ فرلا}$$

$$\text{اس لئے } ع + ع \text{ فرلا} = ع + ع \text{ فرلا} \dots \dots \dots (۲)$$

مسادات (۲) سے مسئلہ مطلوب حاصل ہوتا ہے، ایسا ممکن ہے کہ ع و کا مکملہ ع کے مکملہ کی نسبت زیادہ آسانی سے معلوم ہو سکے۔

محدود مکملہ کی صورت میں جبکہ پہلی حد ۱ ہو اور اوپر کی ب (۱) کے جواب میں ماہل ہوگا

$$[ع + ع] = ع (ع + ع) \text{ فرلا} \dots \dots \dots (۳)$$

اور (۲) کی بجائے

$$\text{مکرم و فرلا} = [\text{ع} \text{ و } \text{ا}] - \text{مکرم و فرلا} \dots\dots\dots (۳)$$

جہاں علامت $[\text{ع} \text{ و } \text{ا}]$ سے مراد ہے کہ پہلے ا کی بجائے ب رکھا جائے پھر ا اور دوسرے نتیجہ کو پہلے سے تفریق کیا جائے۔

مشکل ذیل سے مسئلہ کی اہمیت معلوم ہوگی۔

مثال ۱۔ $\text{مکرم لا جم لا فرلا}$ معلوم کرو

یہاں ہر دو لا اور جم لا کا تکمل معلوم ہو سکتا ہے، لیکن ہم فرض کرتے ہیں $\text{و} = \text{لا}$ چونکہ $\text{و} = \text{ا}$ پس

$$\text{مکرم لا جم لا فرلا} = \text{لا جب لا} - \text{مکرم لا جب لا فرلا}$$

$$= \text{لا جب لا} + \text{جم لا}$$

مثال ۲۔ $\text{مکرم لا جم لا فرلا}$ معلوم کرو

یہاں بھی ہم فرض کرتے ہیں $\text{و} = \text{لا}$ ، چونکہ $\text{و} = \text{ا}$ ، نیا تکمل پرانے سے زیادہ سہل ہوگا

$$\text{مکرم لا جم لا فرلا} = \text{لا جب لا} - \text{مکرم لا جب لا فرلا}$$

مسئلہ چھ پر استعمال ہو سکتا ہے

$$\text{مکرم لا جب لا فرلا} = \text{لا} - (\text{جم لا}) - \text{مکرم لا} - (\text{جم لا}) - \text{فرلا} -$$

$$= - \text{لا جب لا} + \text{جم لا} + \text{مکرم لا فرلا}$$

$$= - \text{لا جب لا} + \text{جم لا} + \text{لا جب لا}$$

اس لئے $\text{مکرم لا جم لا فرلا} = \text{لا جب لا} + \text{لا جب لا} - \text{لا جب لا} - \text{لا جب لا}$

مثال ۳۔ $\text{مکرم لا جم لا فرلا}$ اور $\text{مکرم لا جب لا فرلا}$ معلوم کرو

ایک مسئلہ کے دریافت کرنے کے عمل میں ہم دوسرے مسئلہ کو بھی معلوم کر لیتے ہیں۔ فرض کرو کہ

$$ف = ک \text{ جو } (ب + لا + ج) \text{ فرلا } ق = ک \text{ جو } (ب + لا + ج) \text{ فرلا}$$

اس صورت میں ہم کو کسی ایک جزو ضربی کے مساوی لے سکتے ہیں

$$ف = \frac{ق}{ب + لا + ج} - ک = \frac{ق}{ب + لا + ج} \times [ب + لا + ج] - ک$$

$$= \frac{ق (ب + لا + ج)}{ب + لا + ج} - ک = ق - ک$$

$$= ق - ک$$

اس لئے $ف - ق = ک$ جو $(ب + لا + ج)$ (۱)
اسی طرح $ق$ پر عمل کرنے سے ماہل ہوگا

$ب + ق = ا$ جو $(ب + لا + ج)$ (۲)
(۱) اور (۲) کو $ق$ کے لئے حل کرنے سے

$$ف = ک \text{ جو } (ب + لا + ج) \text{ فرلا} = \frac{ق (ب + لا + ج) + ب (ب + لا + ج)}{ب + لا + ج}$$

$$ق = ک \text{ جو } (ب + لا + ج) \text{ فرلا} = \frac{ق (ب + لا + ج) - ب (ب + لا + ج)}{ب + لا + ج}$$

یہ دو تکملے ریاضی طبیعیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں۔

مثال (۴) $ک$ یا $لا$ - $لا$ فرلا اور $ک$ یا $لا$ \pm $لا$ فرلا معلوم کرو
یہاں تکمل میں صرف ایک جزو ضربی ہے، لیکن ہم کافی کو دوسرا جزو ضربی قرار دیکر اسے
ع کے مساوی کہہ سکتے ہیں، فرض کرو کہ $ع = ا$

$$اے $ک$ یا $لا$ - $لا$ فرلا = $لا$ یا $لا$ - $لا$ فرلا - $ک$ یا $لا$ \times $\frac{لا}{لا - لا}$ فرلا$$

$$= \frac{لا - لا}{لا - لا} - ک = \frac{لا - لا}{لا - لا} فرلا \dots (۵)$$

$$\frac{(\bar{a} - (a - \bar{a}))}{\bar{a} - a} = \frac{\bar{a}}{\bar{a} - a}$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{a} - a} - \frac{\bar{a}}{\bar{a} - a} =$$

اس میں بائیں جانب کی پہلی رقم خود دیا ہوا تکمیل ہے اور دوسری رقم کا تکملہ۔ واجب $\frac{a}{a}$ (۱) میں درج کرو اور تکملہ کو دائیں طرف لے آؤ، ۲ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{a}{a} - \frac{a}{a} = 0 \quad \text{فرلا} = \frac{1}{4} \bar{a} - \frac{1}{4} a + \frac{1}{4} \bar{a} \text{جب } \left(\frac{a}{a}\right)$$

یہی نتیجہ دفعہ ۷ مثال (۱) میں حاصل کیا گیا تھا۔
اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{a}{a} - \frac{a}{a} = 0 \quad \text{فرلا} = \frac{1}{4} \bar{a} - \frac{1}{4} a + \frac{1}{4} \bar{a} \text{لوک } (a + \bar{a})$$

مقابلہ کرو دفعہ ۷ مثال ۲ کے ساتھ۔

اوپر کی جبروی تخیل اکثر کارآمد ثابت ہوتی ہے، اسی طرح کی تخیل مثلثی تفاعل کو تکمیل کرنے میں استعمال کی جاتی ہے، (دفعہ ۱۰، مثال ۲، ۳)

جملہ درجہ دوم $\frac{a}{a} - \frac{a}{a} = 0$ کو مثل دفعہ ۶ تخیل کرنے اور $a + \bar{a} = 0$ رکھنے سے ہم تکمیل کر سکتے ہیں۔

مثال ۵۔ $\frac{a}{a} - \frac{a}{a} = 0$ کو فرلا معلوم کرو

$$\frac{a}{a} - \frac{a}{a} = 0 \quad \text{لوک } a - \bar{a} = \frac{1}{4} \bar{a} - \frac{1}{4} a = 0 \quad \text{لوک } a - \bar{a}$$

۱۰۔ متواتر تخیل

مثال ۱۔ فرض کرو کہ $\frac{a}{a} - \frac{a}{a} = 0$ تکمیل بالخصوص سے

$$\frac{a}{a} - \frac{a}{a} = 0 \quad \text{فرلا} = \frac{1}{4} \bar{a} - \frac{1}{4} a = 0 \quad \text{لوک } a - \bar{a} = 0 \quad \text{فرلا}$$

یعنی $ع = لا^1 فو^1 - ن - ع$ ۔
 $ن$ کی بجائے $ن - ۱$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$ع = لا^1 فو^1 - (ن - ۱) - ع$ ۔

پس $ع = لا^1 فو^1 - ن - لا^1 فو^1 + (ن - ۱) - ع$ ۔

اسی طرح عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $ن$ مثبت صحیح عدد ہو تو مکمل $ع$ بالآخر

یعنی $لا^1 فو^1$ پر یا $لا^1 فو^1$ پر آ کے منحصر ہوتا ہے۔ اگر $ن$ مثبت صحیح عدد نہ ہو لیکن مثبت ہو تو $ع$ ایک ایسے سنگم پر آ کے منحصر ہوتا ہے جس میں $لا$ کا قوت نامہ مثبت کسر واجب۔ اس صورت میں مکمل معلومہ تفاعلوں کے ذریعہ محدود درقوم میں بیان نہیں ہو سکتا، لیکن آئندہ تحقیق کے لئے نہایت موزوں شکل میں آ جاتا ہے۔

مکمل کے مندرجہ بالا طریقہ کو جس میں ایک مکمل اُسی قسم کے ایک اور مکمل پر $لا$ کے منحصر کیا جاتا ہے متواتر تحویل کا طریقہ کہتے ہیں۔
 $لا$ جب $لا$ ، $لا$ جم $لا$ کے مکملوں پر اسی طرح کا عمل ہو سکتا ہے۔

مثال ۲۔ $ع = کر جب لا فر لا$

$ع = کر جب لا فر لا = کر جب^1 لا \times جب لا فر لا$

$= جب^1 لا - (جم لا) - کر (ن - ۱) جب^1 لا - (جم لا) - (جم لا) فر لا$

$= جب^1 لا - (جم لا) + (ن - ۱) کر جب^1 لا - (جم لا) فر لا$

اب $جم لا = ۱ - جب لا$ جب $لا - (جم لا) - (جم لا) - جب لا$

لئے $ع = جب^1 لا - (جم لا) + (ن - ۱) ع - (ن - ۱) ع$

$$\text{پس } ع_1 = \frac{\text{جب}^1 \text{ لا جم لا}}{ن} + \frac{۱-ن}{ن} ع_{۲-۱} \dots (۱)$$

قوت نماں بقدر ۲ کم ہو گیا ہے، ن کی بجائے ن-۲ کہنے سے

$$ع_۲ = \frac{\text{جب}^۲ \text{ لا جم لا}}{۲-ن} + \frac{۳-ن}{۲-ن} ع_{۲-۲}$$

$$\text{پس } ع_۳ = \frac{\text{جب}^۳ \text{ لا جم لا}}{ن} - \frac{۱-ن}{ن} \text{ جب}^۳ \text{ لا جم لا} + \frac{(۱-ن)(۳-ن)}{ن(۲-ن)} ع_{۲-۳}$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اسی طرح تحویل کو جاری رکھنے سے ہم قوت نما کو ایک بنا سکتے ہیں جبکہ ن طاق ہو اور صفر بنا سکے ہیں جبکہ ن جفت ہو۔

$$ع_۴ = \text{جب}^۴ \text{ لا فر لا} = \text{جم لا اور } ع_۳ = \text{جب}^۴ \text{ لا فر لا} = \text{لا}$$

اگر ن مثبت ہے لیکن صحیح عدد نہیں ہے تو ع_۱ کو یہاں تک تحویل کیا جاسکتا ہے کہ قوت نما ن مثبت یا منفی کسر واجب ہو جائے۔ ن کی منفی قیمتوں کے لئے دیکھو مثال ۴۔

ضابطہ (۱) کی نہایت کارآمد صورت اُس وقت پیدا ہوتی ہے جبکہ تکملہ کو حدود صفر اور $\frac{n}{2}$ کے درمیان لیا جائے، اس صورت میں (۱) ہو جاتا ہے

$$\text{جب}^{\frac{n}{2}} \text{ لا فر لا} = [ع_1]^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{\text{جب}^{\frac{n}{2}} \text{ لا جم لا}}{ن} + \frac{۱-ن}{ن} [ع_{۲-۱}]^{\frac{n}{2}} \right]$$

$$= \frac{۱-ن}{ن} \text{ جب}^{\frac{n}{2}} \text{ لا فر لا}$$

چونکہ دوسری رقم دونوں حدود پر صفر ہوتی ہے۔

جس صورت میں ن طاق ہو ع_۱ کی آخری رقم ہوگی

$$\frac{(۱-ن)(۳-ن) \dots (۲ \times ۲)}{ن(۲-ن) \dots (۳ \times ۵)} (- \text{جم لا})$$

اور جس صورت میں ن جفت ہو آخری رقم ہوگی

$$\begin{aligned} & \frac{(1-n)(3-n)(5-n) \dots 1 \times 3}{n(2-n)(4-n) \dots 2 \times 4} \\ & \text{پس } \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} = \frac{(1-n)(3-n) \dots 2 \times 4}{n(2-n) \dots 3 \times 5} \times (n \text{ طاق صحیح عدد}) \\ & \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} = \frac{(1-n)(3-n) \dots 1 \times 3}{n(2-n) \dots 2 \times 4} \times \frac{\pi}{2} (n \text{ جفت صحیح عدد}) \\ & \text{اگر } \text{ج} = \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} \end{aligned}$$

$$\text{تو } \text{ج}^{\text{ج}} = \frac{\text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا جب لا}}{n} + \frac{1-n}{n-2}$$

ضابطہ سے ثابت کرنا آسان ہے یا بالواسطہ محدود و تکملہ کے مفہوم سے ظاہر ہے کہ

$$\begin{aligned} & \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} = \text{ج}^{\text{ج}} \text{ جب لا فرلا} \\ & \text{جب لا اور ج}^{\text{ج}} \text{ لا کی ترتیبوں کو دیکھنے سے معلوم ہو گا کہ} \\ & \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} = 2 \times \text{ج}^{\text{ج}} \text{ جب لا فرلا} \\ & \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} = 2 \times \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} \text{ [جبکہ } n \text{ جفت صحیح عدد ہو]} \end{aligned}$$

[جبکہ } طاق صحیح عدد ہو]

اسی طرح نتائج ذیل یا اسی طرح کے اور نتائج با آسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

$$\text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} = \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا} = 4 \times \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا}$$

نیز ملاحظہ ہو قاعدہ جو مثال ۳ میں دیا گیا ہے۔

$$\text{مثال ۳۔ } f(m, n) = \text{ج}^{\text{ج}} \text{ لا جب لا ج}^{\text{ج}} \text{ لا فرلا}$$

ف (۱۰) پر اگر م جفت ہو۔
 اگر ن جفت ہو تو (۱) سے ف (م) ن تکملہ ف (م) پر موقوف ہوتا ہے
 لیکن ف (م) مثال ۲ کا تکملہ ہے جبکہ ن کی بجائے م لکھا جائے پس مثال ۲
 (۱) سے ف (م) تکملہ ف (۱) پر منحصر ہوتا ہے اگر م طاق ہو اور ف (۱) پر
 منحصر ہوتا ہے اگر م جفت ہو۔
 پس ف (م) ن تحویل کے بعد ذیل کے چار تکملوں میں سے کسی ایک پر موقوف
 ہو سکتا ہے۔

ف (۱۱) = کر ص فرلا = ۱/۲ جب لا ف (۱۰) = کر ص فرلا جب لا
 ف (۱۰) = کر ص فرلا = جم لا ف (۱۰) = کر ا فرلا = لا

اگر تکملہ کو حدود صفر اور ۳ کے درمیان محسوب کیا جائے تو مندرجہ بالا چار تکملوں کی
 قیمتیں بالترتیب ہوتی ہیں ۱/۲، ۱، ۱، ۳
 طالب علم اب ثابت کرے کہ ذیل کا قاعدہ درست ہے

$$\text{کر جب لا جم لا فرلا} = \frac{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴) \dots (۵-۶)}{(۱-۲)(۲-۳)(۳-۴) \dots (۵-۶)} \dots$$

جہاں ص = ۱ سو اُس صورت کے جبکہ م اور ن دونوں جفت صحیح عدد ہیں،
 موخر الذکر صورت میں ص = ۳، مخفی نہ رہے کہ اوپر اور نیچے کے تینوں سلسلوں کے اجزاء
 ضربی کو اُس حد تک جاری رکھنا چاہئے جب تک کہ مثبت رہیں۔ یہ بھی دیکھا جائے کہ ہر سلسلہ
 کے اجزاء بقدر ۲ کے کم ہوتے ہیں۔ اس قاعدہ میں مثال ۲ کے مکملے بھی شامل ہیں جو م
 (یا ن) کو صفر بنانے اور مخفی اجزاء ضربی کو حذف کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

$$\text{کر جب لا جم لا فرلا} = \frac{۱ \times ۳ \times ۱}{۲ \times ۴ \times ۶} = \frac{۳}{۴۲}$$

$$\text{کر جب لا جم لا فرلا} = \frac{۱ \times ۳ \times ۱ \times ۳ \times ۵}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ۸ \times ۱۰} = \frac{۳}{۵۱۲}$$

$$\frac{1}{\text{جب لا}} = \frac{\text{جب لا} + \text{جم لا}}{\text{جم لا}} = \frac{1}{\text{جب لا}} + \frac{\text{جم لا}}{\text{جم لا}} \times \text{جم لا}$$
 لیکن ایسے کلمے ابتدائی حسابات میں چندان ضروری نہیں، ایسی تحویلوں کا خاص منشا یہ ہے کہ ایک دفعہ مکمل بالخصوص کا عمل کرنے کے بعد نیا قوت نمایا کرنے کی نسبت بقدر ممکن بچاؤ ہو جائے کہ جب قوت غاصفی ہو تو اس میں زیادہ سہولت ہوتی ہے کہ مکمل کے قوت نام کو کم کر کے اس پر عمل مکمل کیا جائے۔

مثال ۵۔ عی = کسٹ لا فرلا

عی = کسٹ لا (قط لا) فرلا = کسٹ لا - لا قط لا فرلا۔ عی ۲۔

پس عی = $\frac{\text{کسٹ لا}}{۱ - \text{ن}}$ - عی ۲۔

تحویلی ضابطوں کی اور مثالیں مشقوں میں دی گئی ہیں، لیکن کئی صورتوں میں شلشی ابدال سے اکثر کلمے اوپر کی کسی نہ کسی ایک شکل میں لائے جاسکتے۔

مشق ۳

ابتداءً تا ۲۴ کو بلحاظ لا کے تکمیل کرو

- ۱۔ لا قولا ۲۔ لا قولا ۳۔ لا جب لا
- ۴۔ لا جم لا ۵۔ لا جب لا جم لا ۶۔ لا جب لا
- ۷۔ لا لوک لا (ن = ۱) ۸۔ لا لوک لا
- ۹۔ لا جب لا ۱۰۔ لا قولا ۱۱۔ لا قولا
- ۱۲۔ جب لا ۱۳۔ کسٹ لا ۱۴۔ لا جب لا
- ۱۵۔ لا کسٹ لا ۱۶۔ لا (۲ + ۳ لا - لا)

کی قیمت معلوم کرو جہاں m 'ن' دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

$$۲۹- \text{اگر عی} = \int \frac{\text{فرلا}}{n(n^2 + 1)} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{عی} = \frac{n}{(n-2)(n^2 + 1)} + \frac{3-n}{(n-2)(n^2 + 1)} \text{ عی} = \frac{3-n}{(n-2)(n^2 + 1)}$$

$$۳۰- \text{اگر عی} = \int \frac{n}{n^2 + 1} \text{ فرلا تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{عی} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \text{ عی} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$۳۱- \text{اگر عی} = \int \frac{n}{n^2 + 1} \text{ فرلا تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{عی} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \text{ عی} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$\text{لکھو عی} = \int \frac{n}{n^2 + 1} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} \int \frac{n}{n^2 + 1} \text{ فرلا}$$

جہاں $s = 2$ اور $n = 1$ اور پھر حصوں سے مکمل کرو۔

$$۳۲- \text{اگر عی} = \int \frac{n}{n^2 + 1} \text{ فرلا تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{عی} = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \text{ عی} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$۳۳- \text{اگر } m \text{ 'ن' مثبت صحیح عدد ہوں تو مکمل}$$

$$\int \frac{n}{n^2 + 1} \text{ فرلا}$$

کی قیمت دریافت کرو۔

۳۴۔ مفصل ذیل کی قیمتیں معلوم کرو

$$(۱) \text{ لکھ } ۱۰۰ - ۱۰۰ \text{ فرما } (۲) \text{ لکھ } ۱۰۰ - ۱۰۰ \text{ فرما}$$

۳۵۔ زائد $\frac{۱}{۲}$ - $\frac{۱}{۲}$ = $\frac{۱}{۲}$ پر ایک نقطہ (ضما) ہے،
اس کا فضل و مر اور معین مرتب ہے اور ضما کا دونوں مثبت میں،
اگر ان کے قریب کا رائے ہو تو ثابت کرو کہ رقبہ ا مرتب

$$= \frac{۱}{۲} \text{ ضما } - \frac{۱}{۲} \text{ رب لوک } \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right)$$

اور قطع و ان کا رقبہ ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{ رب لوک } \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right)$$

۳۶۔ منہی ما = (۱-۱) (۳-۱) کو مرتسم کرو اور اس کے بند طے کا رقبہ دریافت کرو۔

۳۷۔ منہی ما = (۱-۱) (۲-۱) کو مرتسم کرو جہاں مثبت ہے اور تمام رقبہ جو اس سے گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔

۳۸۔ زنجیر ما = $\frac{۱}{۲}$ ($\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$) کی قوس کا طول معلوم کرو جبکہ قوس

کو منہی پر کے نقطہ ج سے ناپنا شروع کیا جائے جہاں لا = ثابت کرو کہ جو رقبہ دونوں قوسوں کو منہی اور ج کے معین کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ قوس ج کا لگنا ہے۔

۳۹۔ خط صنوبری (قلب نما) = $\frac{۱}{۲}$ ($\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$) کی قوس کا طول معلوم کرو جبکہ قوس کو مبدأ سے ناپا جائے۔

۴۰۔ لوبی = $\frac{۱}{۲}$ طے کی قوس کا طول معلوم کرو اس شرط کے ماتحت کہ اس = جبکہ = ۰

۴۱۔ نویں درجہ کا طومر علمی قوس کا طول معلوم کرو
جبکہ $\frac{1}{10} = 0.1$ اگر طومر =

۱۱۔ جزوی کسور۔ کسی منطق کسور کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے طریقوں کے

مستحق بحث چیز و مقابلہ کی اکثر کتب نصاب میں ملے گی، اس نظریہ کی مفصل بحث کے لئے طالب علم کو مسئلہ کے جز و مقابلہ حصہ اول، باب ہشتم کی طرف رجوع کرے یہاں ہم صرف چند مثالیں حل کر دیں گے۔ مجوزہ کسور کو کسور واجب فرض کیا جائیگا یعنی یہ فرض کیا جائیگا کہ اس کے شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ کی نسبت کم ہے، نیز یہ بھی فرض کیا جائیگا کہ کسور منفرد ترین رقم میں بیان کر لی گئی ہے۔

فرض کرو کہ مجوزہ کسور $\frac{فا}{(لا)}$ ہے جہاں $فا$ اور $لا$ کے منطق

مجمع تفاعل ہیں۔ $ف$ اور $لا$ کو حقیقی منفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں تحلیل کر لیا جاسکتا ہے جہاں ہر ایک جزو ضربی $لا$ کا خطی تفاعل ہو یا دو درجی لیکن خواہ یہ خطی ہو یا دو درجی یہ اس حاصل ضرب میں کئی مرتبہ تکرار جاسکتا ہے۔

$فا$ اور $لا$ کو جزوی کسور کے مجموعہ میں ایک اور صرف ایک طرح تحلیل کر سکتے ہیں، یہ جزوی کسوریں ذیل کے نمونوں پر مشتمل ہوں گی۔

(۱) $ف$ اور $لا$ کے ہر ایسے خطی جزو ضربی $لا$ کے حاصل جو تکرار نہیں

پاتا جزوی کسور اس شکل $\frac{لا}{حدا}$ کی ہوں گی۔

(۲) $ف$ اور $لا$ کے ہر ایسے خطی جزو ضربی $لا$ کے حاصل جو درجہ مرتبہ

تکرار پاتا ہے جزوی کسوریں ذیل کی شکلوں پر مشتمل ہوں گی

$$\frac{ب}{بب} + \frac{ب}{ببب} + \dots + \frac{ب}{ببببب} + \frac{ب}{بببببب} \dots$$

(۳) $ف$ اور $لا$ کے ہر ایسے ثنائی جزو ضربی $لا$ کے حاصل جو تکرار

نہیں پاتا جزوی کسر اس شکل $\frac{ج + لا + ک}{لا + ج + لا + لا}$ کی ہوگی۔

(۳) ف (لا) کے ہر ایسے ثنائی جزو ضربی (لا + ج + لا + لا) کے مثل جو کہ مرتبہ نگار پاتا ہے ر جزوی کسیر ذیل کی شکلوں پر مشتمل ہونگی

$\frac{ج + لا + ک}{لا + ج + لا + لا} + \frac{ج + لا + ک}{لا + ج + لا + لا} + \dots + \frac{ج + لا + ک}{لا + ج + لا + لا}$
سروں 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ کے دریافت کرنے کا طریقہ ذیل کی مثالوں سے معلوم ہوگا۔

مثال ۱۔ $\frac{لا}{(لا - ۱)(۱ - لا)}$ ، نسب نامہ کوئی جزو ضربی تکرار نہیں پاتا اسلئے

$$\frac{ج}{لا - ۱} + \frac{ب}{۱ - لا} + \frac{ا}{۱ + لا} = \frac{لا}{(لا - ۱)(۱ - لا)(۱ + لا)}$$

کسروں سے خالی کرو۔ اس طرح

$$لا = \frac{ا}{(لا - ۱)(۱ - لا)} + \frac{ب}{(۱ - لا)(۱ + لا)} + \frac{ج}{(۱ + لا)(لا - ۱)}$$

یہ سادات متطابق ہے، یہ لاکھی ہر ایسی قیمت کے لئے پوری ہوگی جسے ہم مسادات میں صج کریں۔ رھو لا + ۱ = یعنی لا = ۱۔ اس طرح جب اور ج والی رقمیں صفر ہو جاتی ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۱ = \frac{ا}{(۱ - ۱)(۱ - لا)} \text{ یا } ۱ = \frac{ا}{۰}$$

اسی طرح رکھو لا = ۱ اس سے جب = ۰ اور رکھو لا = ۲ تو ج = ۰ اور

$$\frac{لا}{(لا - ۱)(۱ - لا)} = \frac{۱}{۱ - لا} + \frac{۱}{۱ + لا} - \frac{۱}{۲}$$

یا معلوم کرنے کے لئے اس کے نسب نامہ کے ساتھ دونوں طرف ضرب دے جاؤ اور پھر رکھو لا + ۱ = ۰، اس طرح

$$1 = \frac{1}{(1-a)(2-a)} \left[\frac{a^2}{(1-a)(2-a)} \right]$$
 اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $(1-a)$ ، $(2-a)$ کا ایک جزو ضربی ہو جو کم از کم نہیں پاتا
 اور اس کے مماثل جزوی کسر $\frac{1}{(1-a)(2-a)}$ ہو تو

$$1 = \frac{1}{(1-a)(2-a)} \left[\frac{a^2}{(1-a)(2-a)} \right]$$

اگر $f(1-a) = (1-a)(2-a)$ ، $f(2-a) = (1-a)(2-a)$

تو $f(1-a) = (1-a)(2-a)$ ، $f(2-a) = (1-a)(2-a)$

$$1 = \frac{1}{(1-a)(2-a)} \left[\frac{a^2}{(1-a)(2-a)} \right] = \frac{f(1-a)}{f(2-a)} = \frac{f(1-a)}{f(2-a)}$$

مثال ۲۔ $\frac{1}{(1-a)(2-a)} = \frac{1}{(1-a)(2-a)}$ ، مکر جزو ضربی $(1-a)$ کے مماثل دو جزوی کیس
 ہونگی اور چونکہ $(1-a)$ کے حقیقی جزو ضربی نہیں حاصل ہو سکتے اس لئے اس کے
 مماثل نمونہ (۳) کی کسر ہوگی۔ پس

$$\frac{1}{(1-a)(2-a)} = \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)}$$

خالی کرنے سے حاصل ہوگا

$1 = \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)}$
 رکھو $(1-a)$ ، حاصل ہوتا ہے $1 = \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)}$ ،
 کہنے سے تحویل کرو۔ اب بائیں جانب $(1-a)$ جزو ضربی ہے اور چونکہ یہ مساوات متطابق
 ہے اس لئے $(1-a)$ دائیں جانب کے تحویل شدہ جملہ کا جزو ضربی ہونا چاہئے۔

اگر ایسا نہیں ہے تو عمل میں کوئی غلطی ہے۔ پس

$1 = \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)}$
 پر تقسیم کرو اور رکھو $1 = \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)} + \frac{1}{(1-a)(2-a)}$ ، اب جب $(1-a)$ دائیں

کر سٹل کے جبر و مقابلہ میں ملے گی۔ اس کا حوالہ اوپر دیا گیا ہے۔

۱۲۔ منطق تفاعلوں کا تکمیل۔ اگر $\frac{ف(لا)}{ح(لا)}$ کسر واجب نہ ہو

تو عمل تقسیم سے اس کو ایک منطق صحیح تفاعل اور ایک منطق کسر واجب کے مجموعہ کے مساوی لکھا جاسکتا ہے۔

منطق صحیح تفاعل کا تکملہ ایک منطق صحیح تفاعل ہوگا۔

$$\frac{۱}{(لا - ح)} \text{ لوک } (لا - ح) = ۱$$

$$\frac{ح}{(لا - ح)} \text{ لوک } (لا - ح) = ح$$

$$\frac{ج + لا}{(لا + ح)} \text{ لوک } (لا + ح) = ج + لا$$

$$\frac{۲}{(لا + ح)} \text{ لوک } (لا + ح) = ۲$$

$$\frac{ج + لا}{(لا + ح)} \text{ لوک } (لا + ح) = ج + لا$$

اس لئے اب ہم صرف $\frac{ج + لا}{(لا + ح)}$ پر غور کریں گے۔

$$\frac{ج + لا}{(لا + ح)} = \frac{ج}{(لا + ح)} + \frac{لا}{(لا + ح)}$$

$$\frac{ج}{(لا + ح)} = \frac{ج}{(لا + ح)} + \frac{لا}{(لا + ح)}$$

عملی طور پر یہ زیادہ آسان ہے کہ $\frac{۱}{(لا + ح)}$ کو ابدال $لا + ح = ۱$ یہاں سے

سے تکمیل کیا جائے لیکن نظری نقطہ نظر سے تحویلی ضابطہ حاصل کرنا موجب دلچسپی ہوگا۔

اگر ہم $\frac{لا + عا}{۱-ر}$ کو تفریق کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{فر لا}{فر لا} \left(\frac{لا + عا}{۱-ر} \right) = \frac{۱}{۱-ر} - \frac{۲(۱-ر)(لا + عا)}{ر}$$

$$= \frac{۲(۱-ر)بہا}{ر} + \frac{۲(۳-۲)}{ر} =$$

جہاں $(لا + عا)$ مساوی $ر$ ۔ بہا کے لکھا گیا ہے۔
شکل کرنے اور ترتیب بدلنے سے

$$\int \frac{فر لا}{ر} = \int \frac{لا + عا}{۱-ر} + \frac{۳-۲}{۲(۱-ر)بہا} \int \frac{۳-۲}{ر}$$

اسلئے $\frac{ج لا + ۲}{ر}$ کا کملہ $\frac{۱}{ر}$ کے کملہ پر جو منقلب مثلثی تفاعل ہے منحصر

ہو سکتا ہے۔
پس $لا$ کے کسی منطق تفاعل کا کملہ منطبق تفاعلوں، لوکارتموں اور منقلب مستدیر
تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

جزوی کسور کے طریقہ سے مکمل کرنے میں بہت محنت اور طول عمل ہوتا ہے، جزوی
کسور میں تحلیل کرنے سے پہلے طالب علم کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ آیا کملہ کسی طرح کے ابلل
سے سادہ شکل میں لایا جاسکتا ہے یا نہیں۔

$$\text{مثلاً } \int \frac{لا + فر لا}{۱ + عا} = \frac{۱}{۲} \int \frac{ع فر ع}{۱ + عا} \text{ جہاں } ع = لا$$

اور $ع$ والی کسر کے ساتھ عمل کرنا $لا$ والی کسر کی نسبت زیادہ آسان ہے۔

۱۳۔ غیر منطبق تفاعل۔ اب ہم ایک دو ایسی صورتوں پر غور کریں گے

جن میں شکل غیر منطبق تفاعل ہے۔
(۱) جب شکل میں صرف $لا$ کی کسور تھیں شریک ہوں تو فرض کرو کہ ان کسور کے

نسب نماؤں کا ذواضفاف اقل ن ہے۔ پس اگر متکمل میں لا = ع نکلیا جائے
تو اس ابدال سے نیا متکمل ع میں منطبق ہو جائیگا۔

پس اگر لا = ع تو

$$\int \frac{لا \text{ فرلا}}{لا + ۱} = \int \frac{ع \times ۲ \text{ فرع}}{ع + ۱} = \int \frac{ع \text{ فرع}}{ع + ۱}$$

$$۲ = \int (ع - ۱ - ۲ + ۱ + \frac{۱}{ع + ۱}) \text{ فرع}$$

$$۲ = (\frac{ع}{۲} - \frac{ع}{۵} + \frac{ع}{۳} - ع + مس \text{ ع})$$

$$۲ = (\frac{۱}{۲} لا - \frac{۱}{۵} لا + \frac{۱}{۳} لا - لا + مس \text{ لا})$$

(۲) جب متکمل میں لا + ب شریک ہو لیکن کسی طرح کا اور اصم شامل
نہ ہو تو ابدال لا + ب = ع سے نیا متکمل ع میں منطبق ہو جائے گا۔

(۳) جب متکمل میں مرت لا + ب لا + ج شریک ہو لیکن کسی طرح کا
اور اصم شامل نہ ہو تو کملہ ایک منطبق تفاعل کے کملہ میں اس طرح تحویل ہو سکتا ہے
صورت اول۔ فرض کر دو کہ مثبت ہے اصم کو اس شکل میں لکھو

$$ما = لا + ف + لا + ق = ف = ب = ق = ج$$

فرض کر دو کہ لا + ف + لا + ق = ع - لا پس مربع اٹھانے اور لا کے
لے مل کرنے سے

$$لا = ع - ق = \frac{فرلا}{ع} = \frac{(ع + ف) ۲ - ع ۲ - (ع - ق) ۲}{(ع + ف) ۲}$$

$$= \frac{(ع + ف + ع) ۲}{(ع + ف) ۲}$$

نیا مکمل صریحاً ع میں منطبق ہوگا۔
صورت دوم۔ فرض کر دو کہ لا منفی ہے، ف کے حقیقی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ
لا + جب لا + ج کے خطی اجزاء نے ضربی حقیقی ہوں کیونکہ اگر یہ حقیقی نہ ہوں تو
جملہ درجہ دوم لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے منفی ہوگا اور اس لئے ف اخیالی ہوگا۔
اب چونکہ (لا) مثبت ہے، اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$ف = لا - ا$$

تخصیص کی خاطر فرض کر دو کہ با < عا (جبریہ لحاظ سے) اور فرض کر دو کہ

$$ع = ا + \frac{ع - با}{با - لا}$$

$$تب ع' = \frac{ع - لا}{با - لا}$$

$$\frac{ع - لا}{ع + ا} = \frac{ع - با}{ع + ا}، \frac{ع - با}{ع + ا} = لا - با، \frac{ع - با}{ع + ا} = لا - با$$

$$ف = لا - ا، (با - ع) = \frac{ع}{ع + ا}، ف = \frac{ع}{ع + ا}، ف = \frac{ع}{ع + ا}$$

نیا مکمل صریحاً ع میں منطبق ہوگا۔
صورت (۲) اور (۳) میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سب اصلیں مثبت ہیں (دیکھو دفعہ ۱۴)

اوپر کی تحلیل سے ظاہر ہے کہ اگر ف لا + با کے مساوی ہو یا

لا + با + ج کے اور مکمل ف (لا، ف) ہر دو لا، ف کا منطبق

تفاعل ہو تو ف (لا، ف) کا مکمل ہر صورت میں ایک منطبق تفاعل کے مکمل میں

تحوّل ہو سکتا ہے اس لئے (دفعہ ۱۱) اس کے مکمل میں صرف منطبق تفاعلوں کو کاربندوں
یا متغلوں متدرج تفاعلوں کی ضرورت ہوتی ہے۔
(۴) فرض کر دو کہ مکمل لا (لا + با + ج) ف ہے۔

(۱) اگر ف مثبت صحیح عدد ہو تو (۱ + ب لا^۱) ف کو پھیلاؤ۔

(ب) یہ انداز کر کے دیکھو $۱ + ب لا = ۶$ جس سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{۱}{ب} - (۱ - ۶) = \frac{۱}{ب} - ۵$$

$$فر = \frac{۱}{۱ - ۶} = \frac{۱}{-۵}$$

اور تکملہ ہو جاتا ہے $\frac{۱}{ب} - ۵$ اور $\frac{۱}{-۵}$

پس اگر $\frac{۱}{ب} - ۵$ مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ ثنائی کو پھیلا یا جاسکتا ہے اور تکملہ محدود ارقام میں حاصل ہو سکتا ہے۔

(ج) اگر $\frac{۱}{ب} - ۵$ مثبت صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ $لا = \frac{۱}{و}$ ، تکملہ ہو جاتا ہے

$$- (۱ + ب لا) = - (۱ + ب \frac{۱}{و}) = - (۱ + \frac{ب}{و})$$

یہاں م کی بجائے $-(۱ + ب لا) = -(۱ + ب \frac{۱}{و})$ ہے، اسلئے اگر

$$- (۱ + ب لا) = - (۱ + ب \frac{۱}{و}) = - (۱ + \frac{ب}{و})$$

عدد ہو تو تکملہ می دو ارقام میں حاصل ہو سکتا ہے۔ ابدال اس صورت میں ہوگا

۱۴۔ اس بحث سے معلوم ہوگا کہ تکمل ایک حد تک اتفاقی عمل ہے، عام نتائج صرف ۱۲ و ۱۳ میں حاصل کئے گئے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ تکمل جب کبھی عمل پذیر ہو سکتا ہے تو ہمیں معلومہ شکل کو مختلف طریقوں سے چند معیاری صورت میں منتقل کرنا پڑتا ہے۔ دفعہ ۱۳ کی صورتوں کے لئے بھی اکثر اوقات یہ زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ عام شکل کو استعمال کرنے کی بجائے ہم کوئی خاص طریقہ اختیار کریں۔ نتیجوں کو تکمل میں زیادہ وقت اس وجہ سے ہوتی ہے کہ انہیں جبریہ اور نشانی

اعمال میں پوری مشق اور مہارت نہیں ہوتی، معیاری صورتوں کو یاد کر لینے کے بعد متغیر کی تبدیلی اور مکمل بالخصوص کے دو اصولوں پر حاوی ہو جانا چاہئے، لیکن یاد رہے کہ جو طالب علم ابتدائی قسم کی مثلثی اور جبریہ تخویلوں پر پوری قوت اور غور نہیں رکھتا وہ خاص صورتوں میں خاص خاص ترکیبیں اختیار کرنے کی وجوہات کو سمجھنے سے قاصر رہے گا، علاوہ اس کے اسے ہر قدم پر ایسی مشکلات کا سامنا ہو گا جو احصا (کیلکولس) کی ذات سے تعلق نہیں رکھتیں بلکہ اس کی جبریہ تعلیم کی کمی اور کوتاہی کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

تکملہ جبکہ منحصر ہو متغیر کی سمت پر۔ ایک اور طرح کی شکل قابل توجہ ہے اور وہ یہ ہے کہ تکملہ ایک سمت کے لئے ایک شکل رکھتا ہے اور دوسری سمت کے لئے دوسری شکل مثلاً $\frac{1}{2}$ تکملہ لوک (لا) ہے اگر لا مثبت ہو اور لوک (لا) ہے اگر لا منفی ہو

اس صورت میں ہم تکملہ کو اس شکل $\frac{1}{2}$ لوک (لا) میں لکھ سکتے ہیں جو دونوں صورتوں پر مشتمل ہے دیکھو دفعہ ۸ مثال ۳ ایک اور صورت کے لئے۔

نیز جذر کی دوہری علامت تکلیف کا باعث ہو سکتی ہے، ہم نے دیکھا ہے کہ

۱۔ $\sqrt{+}$ جب $\sqrt{-}$ کے تکملہ کی دو شکلیں اسی دوہری علامت کی وجہ سے ہیں جو

وقع پذیر ہوتی ہے جبکہ مقلوب حیب التام کو ماس مقلوب سے حاصل کیا جاتا ہے۔

اگر یہ مان لیا جائے کہ علامت جذر کے پہلے ہمیشہ مثبت علامت متصور کی جائیگی

تو تجویز $\sqrt{+} = \sqrt{-}$ صرف اسی صورت میں درست ہوگی

جبکہ $\sqrt{-}$ مثبت ہو، لیکن اگر $\sqrt{-}$ منفی ہو تو لازماً $\sqrt{+} = -\sqrt{-}$

مشق ۴

مثلاً ۱ تا ۴ کو لحاظ لا کے مکمل کرو۔

۳۔ $\sqrt{-}$	۲۔	۱۔ $\sqrt{-}$ $\sqrt{-}$ $\sqrt{-}$
$\frac{(1-\sqrt{-})}{(2-\sqrt{-})}$	$\frac{(1+\sqrt{-})(2+\sqrt{-})}{(2+\sqrt{-})(3+\sqrt{-})}$	$\frac{(1+\sqrt{-})(2+\sqrt{-})}{(2+\sqrt{-})(3+\sqrt{-})}$
$\frac{(1+\sqrt{-})}{(1-\sqrt{-})}$	۳۔	$\frac{(1-\sqrt{-})(2-\sqrt{-})}{(2-\sqrt{-})(3-\sqrt{-})}$

$\frac{1}{(1-a^2)^2}$	-۶	$\frac{1}{(1-a)^3}$	-۵
$\frac{1+a}{1+a^2}$	-۸	$\frac{a}{(1-a)^2}$	-۷
$\frac{1+a+a^2}{1+a^2}$	-۱۰	$\frac{a^2}{1+a}$	-۹
$\frac{1}{(1+a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۱۲	$\frac{a^2}{a^2+b^2-2}$	-۱۱
$\frac{1}{(1+a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۱۴	$\frac{a}{(1+a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۱۳
$\frac{1}{1+a^4}$	-۱۶	$\frac{1}{(1-a^2)(1+a^2)}$	-۱۵
$\frac{1}{(1+a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۱۸	$\frac{a^2}{(1+a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۱۷
$\frac{1}{(1-a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۲۰	$\frac{1}{(1+a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۱۹
$\frac{1}{(1-a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۲۲	$\frac{1}{(1+a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۲۱
$\frac{1}{(1-a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۲۴	$\frac{1}{(1-a^2)(1+a^2+b^2)}$	-۲۳

۲۵- تکملہ $\int \frac{1}{(1-a^2)(1+a^2+b^2)} dx$ کو تخیل کر و ذیل کے ابدال کی مدد سے

$\frac{1-a}{1+a} = e$ اور اسکی قیمت معلوم کرو جبکہ $m = 3$ اور $n = 2$

امثلہ ۲۶ تا ۳ کو بجا آ لا کے مکمل کرو

$$\begin{array}{lll} -26 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & -28 \quad \frac{1}{\sqrt{a+1}} \\ -27 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -29 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & -30 \quad \frac{1}{\sqrt{a+1}} \\ -31 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -32 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & -33 \quad \frac{1}{\sqrt{a+1}} \\ -34 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -35 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & -36 \quad \frac{1}{\sqrt{a+1}} \\ -37 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -38 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & -39 \quad \frac{1}{\sqrt{a+1}} \\ -40 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -41 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & -42 \quad \frac{1}{\sqrt{a+1}} \\ -43 & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & \end{array}$$



باب دوم

محدود تکملے ہندسی سوالات میں ان کا استعمال

۱۵۔ محدود تکملہ۔ اس دفعہ میں اور اگلی دو دفعات میں محدود تکملوں کے متعلق ہم چند ضروری مسائل بیان کریں گے۔

مسئلہ ۱۔ محدود تکملہ صرف اپنی حدود کا تفاعل ہوتا ہے اور یہ تکمل کے متغیر کا تفاعل نہیں ہوتا۔

تکملہ کے ہندسی مفہوم پر غور کرنے سے یہ مسئلہ ظاہر ہے۔ جب تک کہ علامت فا ایک ہی تفاعل کو تعبیر کرتی ہے فا (لا) کی ترسیم جبکہ لا فصل ہو وہی ہوگی جو فا (ع) کی ترسیم ہے جبکہ ع کو فصل مانا جائے۔ اس لئے

$$\text{فا (لا) فرلا} = \text{فا (ع) فرع}$$

نیز اگر فا (لا) = عفا (لا) تو فا (ع) = عفا (ع)

اور ہر دو علامات ایک ہی جملہ ف (ب)۔ ف (ا) کو تعبیر کرتی ہیں۔

مسئلہ ۲۔ فا (لا) فرلا =۔۔۔ فا (لا) فرلا ملاحظہ ہو دفعہ ۱

مسئلہ ۳۔ اگر ا ب اور فا (لا) تکمل کی سعت کے اندر لا کی ہر قیمت

کے لئے مثبت ہو تو تکملہ فا (لا) فرلا لازماً مثبت ہوگا اور صفر نہیں

ہوگا۔ اگر فا (لا) منفی ہو تو تکملہ منفی ہوگا۔

صریحاً پہلی صورت میں تکملہ جس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے وہ مثبت ہے اور دوسری صورت

منفی۔ اگر ف (لا) وقفہ (ا'ب) میں لا کی بعض قیمتوں کے لئے صفر ہو لیکن سب قیمتوں کے لئے صفر نہ ہو تو بھی ظاہر ہے کہ یہ مسئلہ درست رہیگا۔ اسی طرح کا مثلاً ۵، ۶، ۷ کی صورت میں صادق رہیگا۔
مثلاً اس طرح کی مساوات

$$x = \frac{f}{2(1-x)} = \left[\frac{1}{1-x} \right] - 1 = 2 - 1$$

ہمل ہے۔ اس اختلاف کی وجہ یہ ہے کہ مثبت متغی لا کی قیمت ا کے لئے جو وقفہ (۲۰) کے اندر واقع ہے غیر مسلسل ہے۔

مسئلہ ۴۔ x ف (لا) فرلا = x ف (لا) فرلا + x ف (لا) فرلا
کیونکہ دائیں جانب کے کلمہ سے جو رقبہ تغیر ہوتا ہے وہ بلحاظ مقدار اور علامت بائیں جانب کے کلموں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
اسی طرح

$$x$$
 ف (لا) فرلا = x ف (لا) فرلا + x ف (لا) فرلا + x ف (لا) فرلا

اور ایسے ہی وقفہ (ا'ب) کے حصوں کی کسی تعداد کے لئے۔
واقع ہو کہ درمیانی اعداد ج، گ، میں سے کوئی ایک یا زیادہ عدد وقفہ کے اعداد ا'ب میں سے جوڑا ہے اس سے بڑے اور جو چھوٹا ہے اس سے چھوٹے ہوتے ہیں بشرطیکہ ف (لا) متغیر متبوع لا کی ان سب قیمتوں کے لئے بھی جو اس طرح زیر بحث آجاتی ہیں مسلسل ہو۔

مسئلہ ۵۔ اگر $a > b$ اور وقفہ (ا'ب) میں ف (لا) کی بڑی سے بڑی قیمت (جبرئہ لحاظ سے) c ہو اور چھوٹی سے چھوٹی q تو

$$x$$
 ف (لا) فرلا $> c$ (ب-ا) لیکن $< q$ (ب-ا)۔
ع-ف (لا) اور ف (لا)۔ q دونوں مثبت ہیں۔ اسلئے

مسئلہ ۳ کی رو سے تکملے

ک (ع- فارلا) [فرلا اور ک (فارلا- ق) [فرلا-

یعنی ک ع فرلا- ک (فارلا) فرلا اور ک (فارلا) فرلا- ک (ق فرلا

یا ع (ب- ا) - ک (فارلا) فرلا اور ک (فارلا) فرلا - ق (ب- ا) -
دونوں مثبت ہیں۔ پس تکملہ ع (ب- ا) سے کم ہے اور
ق (ب- ا) سے زیادہ ہے۔

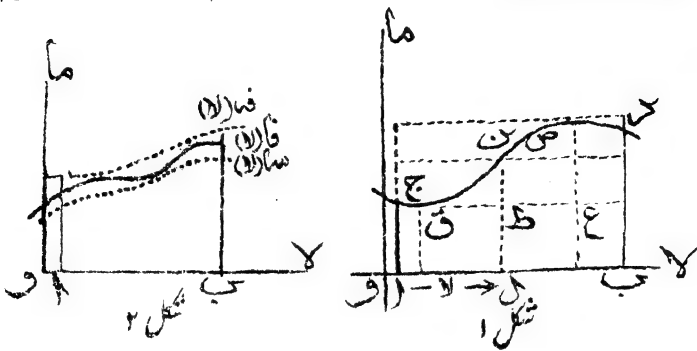
تکملہ ط (ب- ا) کے مساوی ہوگا جہاں ط ایک ایسا عدد ہے جو ع سے
کم ہے اور ق سے بڑا ہے اب چونکہ فارلا مسلسل ہے اسلئے یہ لا کی ایک
قیمت لا کے لئے جو ا ب کے درمیان ہے ط کے مساوی ہوگا۔ اب قیمت
لا اس شکل کی ہے $a + ط$ (ب- ا) جہاں $ط > a$ (دفعہ ۳،
حصہ اول) اسلئے

ک (فارلا) فرلا = فارلا (ب- ا) = فارلا + ط (ب- ا) کم (ب- ا)

یہ مسئلہ ذیل کی شکل (۱) سے واضح ہوتا ہے۔ رقبہ (ب) حصر ص ج سطح
ع \times (ب) سے کم ہے اور ق \times (ب) سے زیادہ ہے یعنی یہ سطح
ط \times (ب) یا (ب) \times ط کے مساوی ہے جہاں
معین ل (ب) ع سے کم ہے اور ق سے زیادہ ہے۔

ط یا فارلا (ب) کو بعض اوقات سمت (ب- ا) میں فارلا کی

اوسط قیمت کہتے ہیں [ملاحظہ ہو دفعہ ۲۵]



مسئلہ ۲۔ اگر $ا > ب$ اور وقفہ $(ا، ب)$ میں $لا$ کی ہر ایک قیمت کے لئے $فا (لا)$ جبریہ لحاظ سے $فنا (لا)$ سے کم ہو اور $سا (لا)$ سے بڑا ہو تو
 $فنا (لا) < فا (لا) < سا (لا)$ فرلا

اس مسئلہ کو مسئلہ کی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے چونکہ
 $فنا (لا) - فا (لا)$ اور $فا (لا) - سا (لا)$
 دونوں مثبت ہیں۔ ہندسی ثبوت کے لئے دیکھو شکل (۲)
 مسئلہ ۳۔ اگر $ا > ب$ اور $فا (لا)$ دو تقاطعوں $فنا (لا)$ $سا (لا)$
 کے حاصل ضرب کے مساوی ہے، ان تقاطعوں میں سے ایک یعنی $فنا (لا)$ وقفہ
 $(ا، ب)$ میں $لا$ کی ہر ایک قیمت کے لئے مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ

$$فنا (لا) \times سا (لا) فرلا > ع < فنا (لا) فرلا$$

لیکن $ق < فنا (لا) فرلا$

جہاں $ع$ اور $ق$ وقفہ $(ا، ب)$ میں $سا (لا)$ کی (جبریہ لحاظ سے) بڑی
 سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں ہیں۔

یہ مسئلہ اسی طرح ثابت ہوتا ہے جیسے مسئلہ ۱ کیونکہ $ع - سا (لا)$
 اور $سا (لا) - ق$ اور اس لئے $فنا (لا) - ع$ $سا (لا) - ق$ اور

فدا (لا) [سا (لا)۔ ق] مثبت ہیں
اگر وقت (لا) کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے فدا (لا) مثنی ہو تو
کر فدا (لا) سا (لا) فرلا = ع کر فدا (لا) فرلا

لیکن > ق کر فدا (لا) فرلا
چونکہ سا (لا) مسلسل ہے اسلئے دونوں صورتوں میں مسئلہ کی مانند لکھ
سکتے ہیں

کر فا (لا) سا (لا) فرلا = سا (لا) کر فدا (لا) فرلا (۱)

جہاں ۱ > لا > ب
مسئلہ بالا کو مساوات (۱) کی صورت میں بیان ہوا ہے اوسط قیمت کا پہلا (مکمل)
مسئلہ کہتے ہیں۔ [ملاحظہ ہو شق ۵ سوالات ۲۹ تا ۳۱]
مثال۔ اگر ن < ۲ تو ثابت کرو کہ مکمل

کر فرلا
بڑا ہے ۱۵ سے اور چھوٹا ہے ۱۵۲۳ سے۔
مکمل کی سمت میں لا کی ہر قیمت کے لئے (سوائے قیمت صفر کے)
لا < لا < ۰ ، ۱ - لا > ۱ - لا > ۱

۱ - لا < ۱ - لا < ۱

پس مکمل کم ہے کر فرلا = جب ۱ = ۱ = ۱۵۲۳ سے

لیکن بڑا ہے کر ۱ فرلا = ۱۵ سے

۱۶ - مربوطہ مکمل

سُئلہ ۱۔ کُ فَا (لا) فرلا = کُ فَا (ر) - (لا) فرلا

فرض کرو کہ لا = ر - ع، تب فرلا = - فرع اور اگر لا = - تو ع = ر اور اگر لا = ر تو ع = ۔

کُ فَا (لا) فرلا = - کُ فَا (ر) - ع فرع = کُ فَا (ر) - ع فرع

اس آخری تکرار میں ہم ع کی بجائے لا لکھ سکتے ہیں [دفعہ ۵، مسئلہ ۱]

اسکی کارآمد صورت یہ ہے کُ فَا (ج) لا فرلا = کُ فَا (ج) [۲ - لا] فرلا

= کُ فَا (ج) لا فرلا

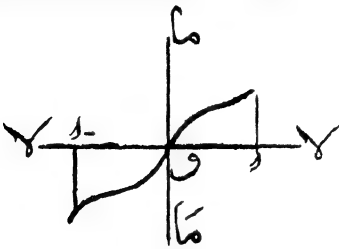
سُئلہ ۲۔ کُ فَا (لا) فرلا = کُ { فَا (ر) - لا } + فَا (لا) فرلا

کیونکہ کُ فَا (لا) فرلا = کُ فَا (لا) فرلا + کُ فَا (لا) فرلا
پہلے تکرار میں فرض کرو کہ لا = - ع، اور یہ ہو جاتا ہے

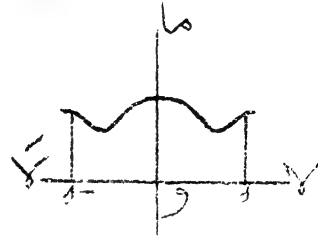
- کُ فَا (ر) - ع فرع = کُ فَا (ر) - ع فرع = کُ فَا (لا) فرلا
جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ کُ فَا (لا) فرلا = ۲ کُ فَا (لا) فرلا اگر فَا (ر) - لا = فَا (لا)

اور کُ فَا (لا) فرلا = ۔ اگر فَا (ر) - لا = - فَا (لا)



شکل ۳



شکل ۴

مذکورہ بالا نتائج ہندی طریق پر نکال بالا سے واضح ہوتے ہیں۔

مسئلہ ۳۔ $\text{کر}^{\text{ف}} \text{فار}(\text{لا}) = \text{کر}^{\text{ف}} \{ \text{فار}(\text{لا}) + \text{فار}(\text{لا}) \}$ فرلا

جسے $\text{کر}^{\text{ف}} \text{فار}(\text{لا}) = \text{کر}^{\text{ف}} \text{فار}(\text{لا})$ فرلا اگر $\text{فار}(\text{لا}) = \text{فار}(\text{لا})$

اور = اگر $\text{فار}(\text{لا}) = \text{فار}(\text{لا})$

ثبوت اسی طرح کا ہے جیسے مسئلہ ۲ کے لئے۔ وقفہ کو حصوں (۰، ۱/۴) اور (۱/۴، ۱) میں تقسیم کرو اور دوسرے تکملے میں رکھو $\text{لا} = ۱ - ۰$ اس نتیجہ کی ایک خاص صورت یہ ہے

$\text{کر}^{\text{ف}} \text{ف}(\text{جب لا}) = \text{کر}^{\text{ف}} \text{ف}(\text{جب لا})$ فرلا

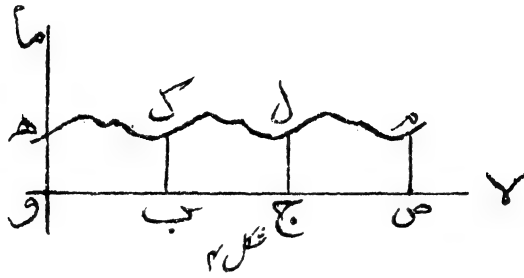
مسئلہ ۴۔ $\text{فار}(\text{لا})$ ایک دوری تفاعل ہے اور اس کا دور ۱ ہے یعنی

$\text{فار}(\text{لا} + ۱) = \text{فار}(\text{لا})$ کی تمام صحیح قیمتوں کے لئے $\text{فار}(\text{لا})$ کے مساوی ہے

ثابت کرو کہ

$\text{کر}^{\text{ف}} \text{فار}(\text{لا}) = \text{کر}^{\text{ف}} \text{فار}(\text{لا})$ فرلا

جہاں د کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔



فرض کر دو کہ **وب = ۱ = ج = ج = ج = ص**۔
 تریسیم کی نوعیت سے ظاہر ہے کہ رتبے **وب** کی **ک** **ج** **ل** کی **ب** **ج** **ص** **م** **ل**
 سب مساوی ہیں پس اگر **وص = د × وب** تو رتبہ
وص **م** **ه** **وب** کی **ک** **ه** کا دگنا ہوگا۔

پاسٹ دے کو دھنوں میں تقسیم کر دو جہاں ہر حصہ کا طول ۱ ہو۔ اس طرح

$$ک^۱ (۱+۱) فرلا + ... + ک^۱ (۱+۱) فرلا$$

$$+ + ک^۱ (۱+۱) فرلا$$

جس تکملہ میں حدود $ک^۱ (۱+۱)$ ہیں اس میں فرض کر دو کہ $لا = ع + ک^۱$ **ک** **د**
 تب **فرلا = فرع** اور جب $لا = ک^۱$ **ک** **د** $ع =$ اور جب $لا = ک^۱ (۱+۱)$ **ک** **د**

تو $ع = ۱$ پس $ک^۱ (۱+۱) فرلا = ک^۱ (ع + ک^۱) فرلا = ک^۱ (ع) فرع$

$$= ک^۱ (ع) فرلا$$

اسی طرح مندرجہ بالا دیکھوں میں سے ہر ایک کی یہی قیمت ہے۔ پس نتیجہ ثابت ہوا۔
 اگر د معنی ہو تو بھی نتیجہ اسی طرح کے استدلال سے ثابت ہو سکتا ہے۔

خاص صورت میں $ک^۱ (ع) فرلا = د ک^۱ (ع) فرلا$

تکملوں کی قیمت معلوم کرنے میں یہ مسائل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۱۔ لامتناہی حدود۔ لامتناہی مشکل۔ اب تک ہم نے یہ مانا ہے کہ

تکمیل کی حدود محدود ہیں اور تکمیل سخت مفروضہ میں متغیر کی ہر قیمت کے لئے مسلسل ہے اور اس لئے محدود ہے، لیکن بعض صورتوں میں انتہاؤں کے استعمال سے ان قیمتوں کا پیمانہ دینا ممکن ہے۔ اگر کسی تکمیل کی ایک حد لامتناہی ہو تو اسکی ہم یہ تعریف اختیار کرتے ہیں۔

$$\text{کر فادرلا} = \text{نہا} \quad \text{کر فادرلا} = \text{نہا}$$

$$\text{کر فادرلا} = \text{نہا} \quad \text{کر فادرلا} = \text{نہا}$$

بشرطیکہ ہر صورت میں انتہائیں ب اور ۱ کے لئے محدود مقدار میں ہوں۔

$$\text{مثال ۱۔} \quad \text{کر فادرلا} = \text{نہا} \quad \text{کر فادرلا} = \text{نہا} \quad \text{ب اور ۱ کے لئے محدود}$$

$$\text{مثال ۲۔} \quad \text{کر فادرلا} = \text{نہا} \quad \text{کر فادرلا} = \text{نہا} \quad \text{ب اور ۱ کے لئے محدود}$$

اس صورت میں لوک ب کی انتہا محدود نہیں ہے، اسلئے تکمیل بے معنی ہے۔

$$\text{مثال ۳۔} \quad \text{کر فادرلا} = \text{نہا} \quad \text{کر فادرلا} = \text{نہا}$$

دفعہ ۹ مثال ۳ کی رو سے اوپر کا نامحدود تکمیل ۱ کو (جملہ + جب لا) کے مساوی ہے۔ اب ہمیں ۱ + ۱ کو (جملہ ب + جب ب) کی انتہا ب کے لئے معلوم کرنا ہے۔ جملہ ب + جب ب ہمیشہ ایک سے کم رہتے ہیں اور تو ب کی انتہا صفر ہے۔ پس تکمیل ۱ کے مساوی ہے۔

اس صورت میں انتہا محدود نہیں ہے اور مکمل بے معنی ہے۔
 اگر $\langle ج \rangle$ اور $\langle ب \rangle$ اور $\langle فا \rangle$ (لا) مسلسل ہو سوائے لا = ج کے لئے تو
 لا اور ب کے درمیان مکملہ مذکور کی تعریف یہ ہوگی۔
 صہ اور صہ دونوں مثبت ہیں

مثال ۴۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا = صہ۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا + صہ۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا
 بشرطیکہ دونوں انتہائیں الگ الگ محدود ہوں۔

مثال ۴۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا = صہ۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا + صہ۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا
 اس جگہ پہلی انتہا ۳ ہے اور دوسری بھی ۳ ہے۔ اس لئے مکملہ کی قیمت ۶ ہے۔

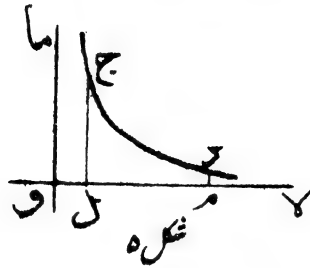
مثال ۵۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا = صہ۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا + صہ۔ $\langle فا \rangle$ (لا) فرلا
 اس صورت میں انتہا محدود نہیں ہے اور مکملہ بے معنی ہے۔
 لا متناہی مکمل یا لا متناہی محدود کی وجہ سے جو مشکلات پیدا ہوتی ہیں وہ اکثر اوقات
 متغیر کی مناسب تبدیلی سے رفع ہو جاتی ہیں۔ مثلاً مثال ۴ میں اگر $\langle فا \rangle$ (لا) جب طہ
 وقفہ کی صورت جبر یہ میں متغیر کی تبدیلی بالخصوص کارگر ثابت
 ہوگی۔

مثال ۶۔ $\langle فا \rangle$ (لا) کی ترسیم کے ذریعہ مکملوں کی انستثنیٰ صورتوں کی ہندی توضیح
 ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ $\langle فا \rangle$ (لا) = $\frac{1}{لا}$ جہاں ن مثبت ہے۔

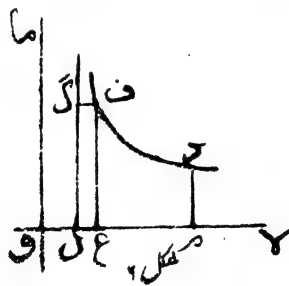
اس صورت میں محور لا متقارب ہے اور رقبہ ل م د ج (ن = ۱)

$$\langle فا \rangle (لا) = \frac{1}{لا} = \left(\frac{1}{لا} - \frac{1}{ب} \right)$$

جہاں $و = ۱$ اور $و = ب$



اگر $<$ اتورقبہ لی مرح ج مائل بہ $\frac{۱}{(ن-۱)}$ ہوتا ہے جبکہ
مائل بہ ∞ ہو لیکن اگر $> ن$ اتورقبہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے کیونکہ $\frac{۱}{ب-۱}$
یعنی $ب-۱$ مائل بہ ∞ ہوتا ہے۔ اگر $=$ اتورقبہ لی مرح ج
لوک $(\frac{ب}{و})$ کے مساوی ہے اور اس لئے $ب$ کے ساتھ مائل بہ ∞ ہوتا ہے
بمخلاف اسکے $ف(لا) = \frac{۱}{(لا-۱)}$ پر غور کرو جہاں $ن$ مثبت ہے۔



اگر $و = ۱$ لی $ع = ص$ ، $و = ب$
تورقبہ $ع$ صرف $ف(ن \neq ۱)$

$$\frac{۱}{(ب-۱)} = \frac{۱}{(ن-۱)} \{ (ب-۱) - (ن-۱) \}$$

اب اگر $\langle \rangle$ اتویہ رقبہ مائل بہ $\frac{(ب-ا)}{ن}$ ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ

صفر ہو، لیکن اگر $\langle \rangle$ اتو رقبہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے کیونکہ صہ $\frac{ن}{صہ}$ یعنی $\frac{ا}{صہ}$

مائل بہ لامتناہی ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو، اگر $\langle \rangle$ اتو رقبہ نوک $\frac{(ب-ا)}{صہ}$ کے مساوی ہوتا ہے اور اس لئے یہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو۔

مسئلہ دفعہ ۵ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر $\langle \rangle$ کے نزدیک $\langle \rangle$ (لا)

کی شکل $\frac{فدا (لا)}{(لا-ا)}$ ہو جہاں فدا $\langle \rangle$ مسلسل ہے تو رقبہ $\langle \rangle$ صہ

اور متناظر محکمہ دونوں ایک محدود انتہا رکھتے ہیں جبکہ $\langle \rangle$ مثبت کسر واجب ہو لیکن اگر فدا $\langle \rangle$ صفر نہ ہو تو یہ انتہا لامتناہی ہوتی ہے جبکہ $\langle \rangle$ ایک کے مساوی یا ایک سے

بڑا ہو۔
سنتے صورتوں کی مزید بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

شق ۵

ذیل کے تخفوں کی قیمتیں معلوم کرو

$$۱- \int_0^{\infty} x^a e^{-bx} dx \quad (a < 0)$$

$$۲- \int_0^{\infty} x^a e^{-bx} dx \quad (a < 0)$$

$$۳- \int_0^{\infty} x^a e^{-bx} dx \quad (a < 0)$$

$$۴- \int_0^{\infty} x^a e^{-bx} dx \quad (a < 0)$$

$$۵- \int_0^{\infty} x^a e^{-bx} dx \quad (a < 0)$$

$$۷- \text{جی} \frac{\text{مر لا}}{\text{لا (لا) (و) (ب) (لا)}} \text{ [کھولا = وجم طما + ب جب طما]$$

$$۸- \text{جی} \frac{\text{لا (لا) (و) (ب) (لا) مر لا}}{\text{جی}} ۹- \text{جی} \frac{\text{مر لا}}{\text{لا (لا) (و) (ب) (لا) (لا) (ب) (لا)}}$$

$$۱۰- \text{جی} \frac{\text{مر لا}}{\text{و جم لا + ب جب لا}} ۱۱- \text{جی} \frac{\text{مر لا}}{\text{و جم لا + ب جب لا}}$$

$$۱۲- \text{جی} \frac{\text{جم لا جب لا مر لا}}{\text{ا + ز جم لا}} ۱۳- \text{جی} \frac{\text{جم لا جب لا فر لا}}{\text{ا + ز جم لا}}$$

$$۱۴- \text{جی} \frac{\text{سر لا مر لا}}{\text{جی}} ۱۵- \text{جی} \frac{\text{لوک لا مر لا}}{\text{جی}}$$

$$۱۶- \text{جی} \frac{\text{لا لوک لا مر لا}}{\text{جی}}$$

۱۷- اگر م اور ن مثبت ہوں تو ثابت کر دو

$$\text{جی} \frac{\text{لا (ا) (لا) مر لا}}{\text{جی}} = \text{جی} \frac{\text{لا (ا) (لا) مر لا}}{\text{جی}}$$

۱۸- اگر ن مثبت ہو تو ثابت کر دو

$$\text{جی} \frac{\text{ن لا مر لا}}{\text{جی}} = \text{جی} \frac{\text{ن لا مر لا}}{\text{جی}}$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اس تکرار کی قیمت معلوم کر دو

$$۱۹- \text{اگر } ۷ = \text{جی} \frac{\text{لا جب لا مر لا}}{\text{ا + جم لا}} \text{ تو ثابت کر دو}$$

$$۷ = \text{جی} \frac{\text{لا جب لا مر لا}}{\text{ا + جم لا}}$$

اس طرح ۷ کی قیمت معلوم کر دو۔

$$۲۴۔ \text{ثابت کر دو کہ } \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۳-۴)لا+۳}} < \frac{۱}{۳} \text{ لیکن } > \frac{۲}{۴}$$

$$۲۵۔ \text{ثابت کر دو کہ } \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۳-۴)لا+۳}} > \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۳-۴)لا+۳}} < \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۳-۴)لا+۳}}$$

$$\text{یعنی } > \frac{۲}{۳} \text{ لیکن } < \frac{۱۹}{۳۲}$$

$$۲۶۔ \text{ثابت کر دو کہ } \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۳-۴)لا+۳}} < ۵،۳ \text{ لیکن } > ۵،۹۵$$

رکھو لا = ۱ + ۶، پھر ۳ + ۳ + ۲ کی بجائے ۴ + ۲ اور ۳ + ۲ رکھو
۲۷۔ اگر عدا اور فدا دو مثبت حادے زاوے ہوں تو ثابت کر دو کہ

$$\sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۱-۲)عدا+۳}} < \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۱-۲)عدا+۳}} > \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۱-۲)عدا+۳}}$$

اگر عدا = فدا = $\frac{\pi}{۴}$ تو ثابت کر دو کہ تخمہ ۵۲۳ اور ۵۴۱ کے درمیان واقع

ہوتا ہے۔

اور طریقوں سے جن میں زیادہ صحت ممکن ہے اس تخمہ کی تقریبی قیمت
۵۲۹،۴۳ حاصل ہوتی ہے۔

۲۸۔ ثابت کر دو کہ

$$(۱) \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۱-۲)عدا+۳}} > \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۱-۲)عدا+۳}} > \sqrt[3]{\frac{\text{فرلا}}{(۱-۲)عدا+۳}}$$

۲۹۔ اس مجسم کے حجم پر غور کرنے سے جو محدودوں کی سطحوں، مستویات لا = ۱ اور

لا = ۲ اور اسطوانوں حا = فدا (لا) اور محی = مسا (لا) کے درمیان

گھرا ہوا ہے دفعہ ۱۵، مسئلہ کی ہندی تعبیر معلوم کرو۔

۳۰۔ اگر مسا (لا) مثبت ہو اور وقفہ (لا) میں فدا (لا) مثبت گھٹنے والا

تفاعل ہو تو مثال ۲۹ کا جو مجسم ہے اسکے حجم پر غور کرنے سے ثابت کر دو کہ

(۱) $\text{فدا} (\text{لا})$ مساوی $\text{فرلا} = \text{فدا} (\text{ا})$ مساوی $\text{فرلا جہاں} (\text{لا})$ جہاں $\text{فدا} (\text{ب})$ لیکن اگر $\text{فدا} (\text{لا})$ مثبت، بڑھنے والا تفاعل ہو تو

(۲) $\text{فدا} (\text{لا})$ مساوی $\text{فرلا} = \text{فدا} (\text{ب})$ مساوی $\text{فرلا جہاں} (\text{لا})$ جہاں $\text{فدا} (\text{ب})$

۳۔ اگر $\text{فدا} (\text{ا})$ کے ا سے ب تک بڑھنے سے $\text{فدا} (\text{لا})$ بڑھے (جبریہ لحاظ سے)

تو ثابت کر دو کہ مثال ۳۰ (۱) میں $\text{فدا} (\text{لا})$ کی بجائے $\text{فدا} (\text{ب})$ - $\text{فدا} (\text{لا})$

رکھا جاسکتا ہے لیکن اگر $\text{فدا} (\text{لا})$ (جبریہ لحاظ سے گھٹے تو مثال ۳۰ (۲) میں $\text{فدا} (\text{لا})$

کی بجائے $\text{فدا} (\text{ا})$ - $\text{فدا} (\text{لا})$ رکھا جاسکتا ہے - ثابت کر دو کہ اگر یہ ابدال عمل میں

لائے جائیں تو ہر دو (۱) اور (۲) ہو جاتے ہیں

$\text{فدا} (\text{لا})$ مساوی $\text{فرلا} = \text{فدا} (\text{ا})$ مساوی $\text{فرلا جہاں} (\text{لا})$ جہاں $\text{فدا} (\text{ب})$

اس صورت میں $\text{فدا} (\text{لا})$ مثبت ہو سکتا ہے یا منفی - اوپر کی مساوات میں جو مسئلہ

ہوا ہے اُسے اوسط قیمت کا دو سرا مسئلہ (تکمیلی) کہتے ہیں - یہ مسئلہ دست درگاہ $\text{فدا} (\text{لا})$

چر دو مثبت اور منفی قیمتیں اختیار کرے اگرچہ اس صورت میں مسئلہ کی توضیح کے لئے

مزید تشریح کی ضرورت ہوگی -

رقبہ سے توضیح کر دو جبکہ مساوی $\text{فدا} (\text{لا}) = ۱$

دفعہ ۱۸ - چند معیاری رقبے اور حجم -

اس دفعہ میں ہم چند مشہور نتائج جو اس سے قبل حاصل کئے جا چکے ہیں یا باسانی

ثابت ہو سکتے ہیں جمع کرینگے -

(۱) قائم مستطیر اسطوانہ - فرض کر دو کہ قاعدہ کا نصف قطر ا ہے اور ارتفاع ف ،

حجم $= \pi \text{ا}^۲ \text{ف}$ ، منحنی سطح $= \pi \text{ا}^۲ \text{ف}$

(۲) قائم مستطیر مخروط - فرض کر دو کہ قاعدہ کا نصف قطر ا ہے، ارتفاع ف ،

$$\text{ضلع مائل} = \text{ل} = \text{مائل} + \text{ف}^2$$

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} \pi \text{ و ف}^2 \text{، منحنی سطح} = \pi \text{ و ل}$$

مخروط ناقص کے لئے جس کا ارتفاع ف ہے، مائل ضلع ل اور سروں کے نصف قطر و اور ب، حجم = $\frac{1}{3} \pi (و^2 + و ب + ب^2) \text{ ف}$ ، منحنی سطح = $\pi (و + ب) \text{ ل}$

فرض کرو کہ اسی مخروط کے قاعدہ کا رقبہ ق ہے، ارتفاع ف اور راس سے فاصلہ لا پر قاعدہ کے متوازی جو مخروطی تراش ہے اس کا رقبہ لا ہے

$$\text{تب لا : ق} = \text{لا : ف}$$

کیونکہ متوازی تراشیں متشابہ ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ اس حصہ کا حجم ح ہے مگر قاعدہ لا ہے اور ارتفاع لا۔ پہلے رتبہ کے مضامینات تک صف ح = لا صف لا اور صف ح = لا، اس لئے کل مخروط کا حجم ہے

$$\text{لا فر لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}} \text{ لا فر لا} = \frac{1}{3} \text{ ق ف}$$

مخروط ناقص کے لئے جس کا ارتفاع ف ہو اور سروں کے رقبے (ا اور ب)

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} \pi \{ا + ب + (ا ب + ب^2) \text{ ف}\}$$

(۳) کرہ۔ فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر سر ہے۔ نصف ۵۴، مثال ۲ حصہ اول کی دہ اس کرہ کی ٹوپی کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو = $\pi \text{ ف}^2 (سر - \frac{1}{3} \text{ ف})$ اور ٹوپی کی کرہی سطح = $\pi \text{ سر ف}$ ۔ اگر ان نتائج میں ف کو ۲ سر کے مساوی رکھا جائے تو کرہ کا حجم اور سطح بالترتیب $\frac{4}{3} \pi \text{ سر}^3$ اور $\pi \text{ سر}^2$ حاصل ہوتے ہیں۔ یہ توجہ کے قابل ہے کہ کرہ کی ٹوپی کی منحنی سطح اس اسطوانہ کی منحنی سطح کے مساوی ہے جس کا ارتفاع دہی ہے جو ٹوپی کا ہے اور جس کا قاعدہ کرہ کے بڑے دائرے کے مساوی تھا اگر کرہی قطاع کا حجم معلوم کرنا ہو تو ٹوپی کے حجم میں اس مخروط کا حجم جمع کیا جاسکتا ہے

جس کا راس کرہ کے مرکز پر ہو اور جس کا ارتفاع $س$ ۔ $ف$ ہو۔ پس حجم مطلوب یہ ہے

$$\pi (س - \frac{1}{3} ف) (\frac{1}{3} ف + \pi (س - \frac{1}{3} ف) (س - \frac{1}{3} ف))$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times 2 س^2 ف = \frac{2}{3} \pi س^2 ف$$

یہاں π ٹوٹی کی سطح ہے۔ یہ نتیجہ زیادہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے اگر ٹوٹی کی سطح کو چھوٹے رقبوں کی بڑی تعداد میں تقسیم کیا ہو فرض کریں۔ اس طرح قطع کرہ ایسے مخروطوں کی ایک بڑی تعداد سے بنا ہو تصور ہو گا جن میں سے ہر ایک کا ارتفاع $س$ ہے پس قطع کا حجم اس طرح بھی $\frac{2}{3} \pi س^2 ف$ میں $س$ ہوگا۔

(۴) ناقص۔ ناقص کے محور ۲ و ۲ ب ہیں، اس کا رقبہ

$$= \pi \times \frac{2}{3} ف (2 - \frac{2}{3} ف) = \frac{4}{3} \pi ف (3 - ف)$$

اس کرہ ناکا کا حجم جو ناقص کو محور اعظم ۲ کے گرد پھرنے سے حاصل ہو

$$= \frac{4}{3} \pi ف (3 - ف) \times 2 = \frac{8}{3} \pi ف (3 - ف)$$

اس کرہ ناکو انگوڑی یا لمبو تر کرہ ناکا کہا جاسکتا ہے۔ جب گردش کا محور محور اصغر ۲ ہو تو کرہ ناکا پیٹا سیب کی شکل کا ہوگا، ایسے کرہ ناکا کا حجم

$$= \frac{8}{3} \pi ف (3 - ف) \times 2 = \frac{16}{3} \pi ف (3 - ف)$$

لمبو تر کرہ ناکا کی سطح ہے

$$= \frac{16}{3} \pi ف (3 - ف)$$

$$\text{جہاں } \left(\frac{س}{ف} \right) = 1 + \left(\frac{س}{ف} \right) = \frac{س}{ف} \times \frac{3 - ف}{3 - ف} = \frac{س}{ف} \times \frac{3 - ف}{3 - ف}$$

فرض کر کہ ناقص کا خروج مرکز $ز$ ہے، تب $ز = 3 - ف$ ۔ $ب$

اور چونکہ $\pi = 3.14159$ اسلئے تکملہ اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\pi^2 = \int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi \right) = \frac{1}{2} \pi$$

اور اسکی قیمت ہے

$$\pi^2 = \left\{ \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi \right\} = \frac{1}{2} \pi$$

ز۔ کے لئے اس جملہ کی انتہا $\pi = 3.14159$ ہے جو نصف قطر کے کرہ کی سطح ہے۔
چپٹے کرہ نما کے لئے طالب علم دیکھ سکتا کہ سطح مطلوبہ ہے

$$\pi^2 = \int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi \right) = \frac{1}{2} \pi$$

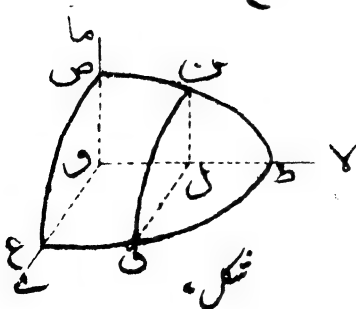
$$\pi^2 = \left\{ \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi \right\} = \frac{1}{2} \pi$$

$$\text{چونکہ } \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi$$

اسلئے بہت $\frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi$ (دفعہ ۴ حصہ اول نتیجہ صریح)

پس ز۔ کے لئے اس رقبہ کی انتہا $\pi = 3.14159$ ہے۔

$$(5) \text{ ناقص نما } = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi = \frac{3}{2} \pi$$



محدودوں کی مستوی سطحوں پر اس
منحنی سطح کی تراشیں ناقص ہیں،
سطح صاف وے کے متوازی
مستوی تراش لی ن ق ہے
جو قطع ناقص ہے۔ اگر
و ل = لا تو

$$ل کت = \frac{ب}{د} \left[\frac{ا}{د} - لا \right]$$

$$ل ق = \frac{ج}{د} \left[\frac{ا}{د} - لا \right]$$

اور چونکہ ناقص کت کی کار قبہ

$$لا = \frac{پ}{د} \left[ل کت \times ل ق \right] = \frac{پ}{د} \left[\frac{ا}{د} - لا \right] \left[\frac{ب}{د} - لا \right] \left[\frac{ج}{د} - لا \right]$$

اگر عددوں کی سطوح مستویہ سطح ص ع ق کت اور تراش کت ق کے درمیان گھرا ہوا حجم ح ہو تو نسبتہ اول کے صفاریات تک صف ح = لا صف لا اور صف لا ح = لا صف لا ح کا حجم

$$= \frac{لا}{د} \left[\frac{ا}{د} - لا \right] \left[\frac{ب}{د} - لا \right] \left[\frac{ج}{د} - لا \right] = \frac{لا}{د} \left[\frac{ا}{د} - لا \right] \left[\frac{ب}{د} - لا \right] \left[\frac{ج}{د} - لا \right]$$

اس لئے ناقص نہا کا کل حجم $\frac{پ}{د} \left[\frac{ا}{د} - لا \right] \left[\frac{ب}{د} - لا \right] \left[\frac{ج}{د} - لا \right]$ ہوا۔

مثلاً ۲ اور ۵ میں حجم دراست کرنے کا جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اس کا استعمال صحیحاً ہر ایسی صورت میں ہو سکتا ہے جہاں محور لا پر کی عمودی تراش کار قبہ (لا کا معنویہ) تراش اعلیٰ (لا) ہو۔ یہی صورت میں حجم مناسب حدوں کے اندر عنصر (لا) کا مکملہ ہوتا ہے۔ [دیکھو مثال ۳، دفعہ ۵۵ حصہ اول] اگر محور قائم نہ ہوں تو اس صورت میں جس ترتیم کی ضرورت ہوگی اوسکا دیکھنا آسان ہے۔

منحنيات کا مرتسم کرنا۔ اگلی مشقوں تک جانے سے پہلے طالب علم اگلی

دو اشاروں کو غور سے دیکھ لے جو پہلے بابوں میں منحنيات کی ترتیم کے متعلق دیے گئے ہیں۔ ان کی مدد سے اوپر پہلے اور دوسرے مشقوں کی مزید اعانت سے وہ مقابلیت آسان منحنيات کی ترتیمیں بنا سکیگا۔ بالعموم اس طرح کا طرز عمل اختیار کرنا چاہئے۔

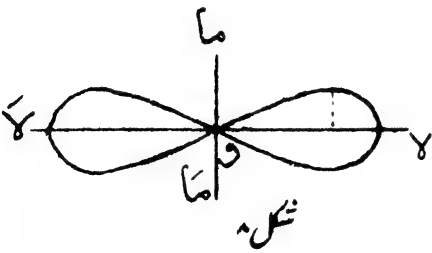
- (۱) تشاکل دیکھنے کی غرض سے مساوات کا معائنہ کیا جائے۔
- (۲) یہ دیکھا جائے کہ منحنی محوروں کو کہاں عبور کرتا ہے۔
- (۳) لا کی (یا ح کی) وہ محدود قیمتیں معلوم کی جائیں جو ح کو (یا لا کو) لامتناہی بنا دیتی ہیں۔ یہ قیمتیں یا العموم ان متقاربوں کو ظاہر کر سکی جو محوروں کے متوازی ہیں۔
- بال متقارب سادہ صورتوں میں دفعہ ۲ یا دفعہ ۶ حصہ اول کے طریقوں سے حاصل ہو سکتے ہیں، لیکن ایسی صورتوں کی تفصیلی بحث اس کتاب کی محدودیت باہر ہے۔
- (۴) ایک محدود کی وہ قیمتیں معلوم کی جائیں جو دوسرے محدود کی متناظر قیمتوں کو خیالی بنا دیتی ہیں۔
- (۵) منحنی کا ذوال دریا فت کیا جائے (ملاحظہ ہو دفعہ ۵۴ حصہ اول)۔ نیز موڈ پر کے نقطے معلوم کیے جائیں۔
- (۶) دوسرے مشتق معلوم کیا جائے۔ اس سے قوس کے تقعر اور تحدب نیز اس کے نقاط انعطاف کا پتہ چلیگا، لیکن دوسرے مشتق کے معلوم کر نیکار عمل اکثر اوقات دشوار اور محنت طلب ہوتا ہے اور منحنی کا عام طریق بغیر کسی مدد کے عام تحلیلات کی بنا پر بخوبی معلوم ہو سکتا ہے۔
- قطعی مساواتوں کے لئے بھی طرز عمل ایسا ہی ہے۔ اس میں اکثر اوقات سہولت ہوگی کہ سمتی نیم قطر کو منحنی ہی مانا جاسکے۔ مثلاً نقطہ (-۱، -۱) تیسرے ربع میں واقع ہے، اسے قطعی حدود (۲، ۵) یا (-۲، -۵) دونوں ہو سکتے ہیں۔ دوسری شکل (-۲، -۵) کے یہ معنی ہیں۔ فرض کر دو کہ لا و ف کے مساوی ہے۔ اور ف = لا، ف کو ف میں سے ف تک اتنا خارج کیا جائے کہ ف = ف، تب ف مطلوبہ نقطہ (-۲، -۵) ہوگا۔ (ملاحظہ ہو مشتق ۶، مثال ۲۳)

رقبہ یا قوس کا طول نکالنے سے پہلے منحنی کی عام شکل معلوم کر لینی چاہئے۔ تکملوں کے حل کرنے میں ابدالوں سے کام لینا پڑے گا، طالب علم یاد رکھے کہ ابدال کے مناسب انتخاب سے عمل میں بہت سہولت واقع ہوگی۔
خواہ منحنی کی مساوات قائم محدودوں میں ہو بعض اوقات اسے قطبی محدودوں میں تبدیل کر لینے سے عمل تکمیل میں اختصار پیدا ہوگا۔

مشق ۶

۱۔ مکانی ما' = ۴ لا محور لا کے گرد گھومنے سے جسم پیدا کرتا ہے، ایک مستوی سطح نقطہ لا = ھ میں سے محور لا پر عمود وار گذرتی ہے اور اس جسم کو کاٹتی ہے۔ مقطوعہ کا حجم اور اسکی منحنی سطح معلوم کرو۔
۲۔ محور لا پر کے نقطہ لا = ھ میں سے ایک مستوی سطح محور لا پر عمود وار گذرتی ہے اور مکانی ما' = ۲ لا کو قطع کرتی ہے۔ محدود مقطوعہ کا حجم دریافت کرو۔

۳۔ منحنی لا' ما' + ب' لا' = لا' ب' لا' (شکل ۸) جو رقبہ گھیرتا ہے اسے معلوم کرو۔



دونوں محوروں کے گرد تشاکل،

لا' ≥ لا' ما' کی قیمت عظم = ۲

محور لا کے گرد گھومنے سے منحنی جو حجم پیدا کرتا ہے اسکا حجم دریافت کرو۔

۴۔ منحنی ج' ما' = لا' لا' (ا-ب) (ب-لا) سے جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔ ب' < ا' < .

اگر لا کم ہو ا سے یا بڑا ہو ب سے تو ما' نیالی ہوتا ہے، سوائے

لا = کے جبکہ ما = اسے یہ بند منحنی ہے اور محور لا کے گرد متشاکل ہے۔ یہاں منحنی پر واقع گراں کے نزدیک کوئی اور نقطہ نہیں۔ یہ اکیلا نقطہ کہلاتا ہے۔

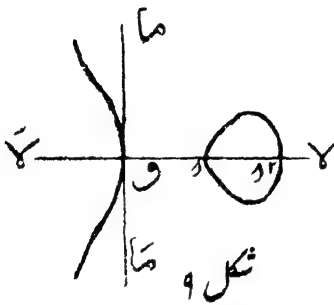
۵۔ منحنی (لا + ما) = ۲ لا + ب ما کا رقبہ معلوم کرو۔

قطبی محدودوں میں لے جاؤ۔ یہاں اکیلا نقطہ ہے۔

۶۔ منحنی ب ما = لا (لا - ۱) (۱ - لا) کو مرتسم کرو جہاں اربع دونوں مثبت ہیں۔

ما خیالی ہے جبکہ (۱) لا < ۱ (۲) لا > ۱ شکل ۹

۷۔ منحنی ۱۶ لا + ما = ب لا (۱ - لا) کا رقبہ معلوم کرو اور ب دونوں مثبت ہیں۔



۸۔ منحنی ب ما = لا (لا - ۱) (۱ - لا) کو مرتسم کرو جہاں ج < ب < ۱ اور ج < ۱۔

مفصلہ ذیل صورتوں پر غور کرو۔

(۱) ب = ۱ (۲) ب = ج (۳) ب = ج

مثال ۱ کی طرح منحنی ایک بیضوی اور ایک لامتناہی شاخ پر مشتمل ہے،

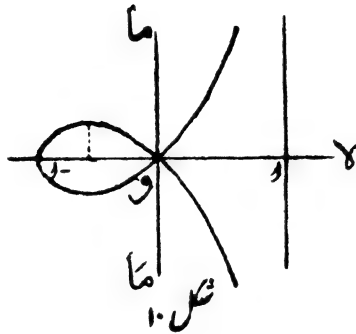
صورت بیضوی حلقہ شاخ کے بائیں جانب واقع ہے۔ جب ب = ۱

تو بیضوی ٹھکرا ایک تنہا نقطہ (۰، ۰) پر رہ جاتا ہے، جب ب = ج تو

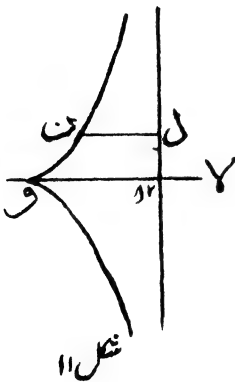
منحنی نیم گنبدی ہو جاتا ہے جہاں (۰، ۰) اس کا قعر ہے۔ عام صورتیں

جبکہ لا ب ج باہم نامساوی ہوں رقبہ ابتدائی ٹکڑوں کی رقوم میں نہیں بیان کیا جاسکتا۔

۹۔ منحنی $ما^2(لا-۱) = لا^2(لا+۱)$ کو مرتسم کرو (۱) اسکے حلقہ کارقبہ
(۲) منحنی اور متقارب کے درمیان کارقبہ معلوم کرو۔ شکل ۱۰



اس منحنی کا ڈھال صفر ہے جبکہ $لا = (۱ \pm \sqrt{۵})$ کے مساوی ہو لیکن
 $لا = (۱ + \sqrt{۵})$ کے لئے $ما$ خیالی ہوتا ہے۔
۱۰۔ ایک منحنی کی مساوات $ما^2(لا-۱) = لا^2(لا+۱)$ ہے، اس منحنی اور اس کے
مستقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو شکل ۱۱



نیز اس منحنی کو اس کے متقارب کے گرد
گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکا
جسم دریافت کرو۔
اگر $لا$ کی متقارب پر عمود
ہو تو حجم مطلوب ہے

$\int_0^{\infty} \pi r^2 dl = \int_0^{\infty} \pi r^2 (لا-۱) dلا$
تکمل کرنے کے لئے رکھو

$لا = ۱$ جب $ط$ $ما = ۱$ جب $ط$
حجم $ط$

- اور طہ کے حدود ہیں . اور $\frac{\pi}{2}$
- ۱۱۔ منحنی لا ماً = (۱ - لا) اور اس کے متقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو نیز منحنی کے متقارب کے گرد گردش کرنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔
- ۱۲۔ منحنی ما (لا + لا) = لا (لا - لا) کے حلقہ کارقبہ معلوم کرو۔
- ۱۳۔ ایک ربع دائرہ کا نصف قطر لا ہے اس کے سروں پر تماس کھینچے گئے ہیں قوس ربع اور تماسوں کے درمیان جو شکل بنتی ہے اسکو ایک تماس کے گرد پھرنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم دریافت کرو۔
- ۱۴۔ ایک قوس دائرہ جس کا نصف قطر لا ہے اپنے وز کے گرد گھوم کر ایک مجسم پیدا کرتی ہے اگر قوس کا طول ۲ لا تھا ہو تو ثابت کرو کہ مجسم کا حجم
- ۲۲ لا (جب حد - ۱ جب حد - حد جم حد) ہے اور مجسم کی سطح
- ۲۲ لا (جب حد - حد جم حد) ہے۔
- ۱۵۔ اگر منحنی لا ماً = لا کی قوس کا طول س ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi} \left[\pi - \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi \right]$$

دکھاؤ کہ قوس کا طول ابتدائی تغاقلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے جبکہ ذیل کی کسی صورت کا ہو $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \pi$ یا $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \pi$ جہاں ک کوئی عدد صحیح ہے مثبت یا منفی۔

۱۶۔ $(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \pi)$ کی ترسیم اور محور لا کے درمیان کارقبہ معلوم کرو۔

۱۷۔ منحنی $(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \pi) = \frac{\pi}{2} (1 - \frac{\pi}{2})$ سے جو کل رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔

رکھو لا = جب طہ تب ما = ب جم طہ اور رقبہ ہے

نہ ک ما در لا = ۱۲ اب (جب طہ جم طہ مرطہ = $\frac{3}{8} \pi$ اب

۱۸۔ خط مدور ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۳۷)

$$\text{لا} = \text{ا} (\text{طہ} - \text{جب طہ}) \text{ ما} = \text{ا} (\text{ا} - \text{جم طہ})$$

(۱) منحنی کے ایک محراب اور محور کا کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو۔

(۲) محراب کا طول طہ = سے طہ = حد تک دریافت کرو۔

(۳) محراب کو محور کا کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔

(۴) محراب کو اس کے رأس پر کے ماس کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو (رأس پر طہ = π)

$$\text{یہاں } \text{ا} \text{ ما در لا} = \text{ا} (\text{ا} - \text{جم طہ}) \text{ در طہ} = \frac{\text{در س}}{\text{در طہ}} = ۲ \text{ ا جب طہ}$$

۱۹۔ اس پارسطی کا حجم معلوم کرو جو محدودوں کی سطوح مستویہ اور مستوی

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} + \frac{\text{جی}}{\text{ج}} = ۱ \text{ سے بنتی ہے۔}$$

۲۰۔ لا = اور لا = کے درمیان اس مجسم کا حجم معلوم کرو جسکی مسادات

$$\text{جی} + \frac{\text{ا} \text{ ما}}{\text{لا}} = \text{ج} \text{ ہے۔ اس مجسم کو ہم "مخروط فائہ" کہیں گے۔}$$

۲۱۔ منحنی لا + ما = ا کا محیط دریافت کرو۔

$$\text{اگر لا} = \text{ا جب طہ} \text{ تب ما} = \text{ا جم طہ} \text{ اور } \frac{\text{فر س}}{\text{فر طہ}} = ۳ \text{ ا جب طہ جم طہ}$$

$$\text{محیط ہے } \text{ا} \text{ ج} = ۲ \text{ ا جب طہ جم طہ در طہ} = ۶ \text{ ا}$$

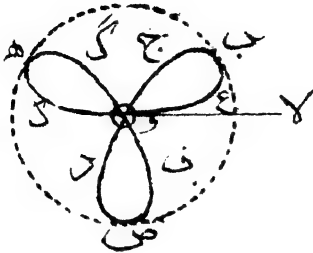
۲۲۔ مخروطی کی قطبی مسادات جبکہ اس کے قطب ہو (۱ + ا جم طہ) = ل ہے۔

(۱) مسکانی (۲) ناقص کی صورت میں وہ رقبہ معلوم کرو جو ابتدائی خط منحنی اور

سمتی قطر طہ = حد کے درمیان گھرا ہوا ہے (حد > π)

۲۳۔ دکھاؤ کہ منحنی ر = ا جب ۳ طہ میں مسادی رقبہ کے تین ملحق ہیں

جو سب کے سب نصف قطر کے دائرہ کے اندر واقع ہیں، ایک حلقہ کا رقبہ دریافت کرو۔
 جسے ظہا صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے
 مرثم نقطہ حلقہ و ع ب ج و
 مرثم کرتا ہے۔



جب، طہ قیمت $\frac{\pi}{3}$ سے $\frac{\pi 2}{3}$

تک بڑھتا ہے تو منفی ہوتا ہے اور
میں نقطہ حلقہ و کس ص ف

کو مرسم کتاب ہے، جیسے طہا، $\frac{32}{2} = 16$ تک بڑھتا ہے (مثبت ہوتا ہے اور نقطہ حلقہ و گدھ تک کو پیدا کرتا ہے۔ طہا کے اس سے زیادہ بڑھنے سے کوئی نئی توس پیدا نہیں ہوتی۔

۲۴۔ - تخفی ر = ا جب ن ط کے تمام حلقوں کے اندر جو رقبہ گھرا ہوا ہے اُسے معلوم کرو جبکہ (۱) ن طاق عدد صحیح ہو (۲) ن جفت صحیح ہو۔

۲۵۔ منحنی راجم طہ = واجب ۳ طہ کے ایک حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۲۶۔ معنی رجم طہ = رجم ۲ طہ کے حلقہ کا رتبہ معلوم کرو۔

۱۹۔ بند مخفی۔ فرض کر دو کہ **اجناب** ایک منحنی ہے اور

ایک خط مستقیم اسکو دوسے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتا نیز فرض کرو کہ اس کے سبب معین

مشبت ہیں۔ افرض کر دو کہ لی جی ٹی سی اس ٹیخی کے ماس ہیں جو محمود ماس کے

متوازی ہیں۔ نیز $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

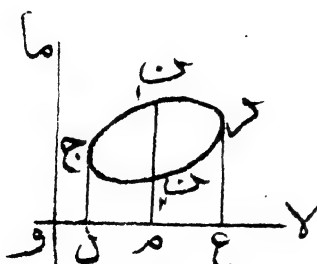
اور $ع = ب$

جس رقبہ کا منحنی احاطہ کرتا ہے وہ ہے

آممن و لا - آممن و لا

(1) $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

جہاں کن اور کن بالترتیب



شکل ۱۳

ج ج ک اور ج ک ہ ک پر انکی سمتوں میں حرکت کرتے ہیں جیسے
 لا، ۱ سے ب تک بڑھتا ہے۔
 تیلے (۱) اس طرح بھی لکھے جاسکتے ہیں

$$ک' م ک' فرلا + ک' م ک' فرلا \dots\dots (۲)$$

اب فرض کرو کہ اس منحنی پر کے کسی نقطہ کے محمد لا، کا ایک تیسرے متغیر (مثلاً) ت
 کے تقاطعوں کے طور پر بیان ہو سکتے ہیں اور یہ متغیر ایسا ہے کہ جیسے ت، ت سے
 ت تک بڑھتا ہے، نقطہ (لا، کا) منحنی کے گرد پورا سفر کر جاتا ہے۔ فرض کرو کہ جیسے
 ت، ت سے ت تک بڑھتا ہے نقطہ (لا، کا) براستہ قوس ج ج ک ج ج سے ت تک
 سفر کرتا ہے اور جب ت، ت سے ت تک بڑھتا ہے تو نقطہ (لا، کا) جس سے ج ج تک راستہ
 قوس ج ج ک ج سفر کرتا ہے۔ مثلاً ہم ت کو منحنی کی قوس فرض کر سکتے ہیں جسے
 ج سے ناپنا شروع کیا جاتا ہے، پس اس مفروض کے مطابق
 ت = ت، ت = قوس ج ج ک ج، ت = کل محیط
 اگر ت کو مکمل کا متغیر قرار دیا جائے تو (۲) ہو جائیگا

$$ک' م ک' فرلا قوس + ک' م ک' فرلا قوس \dots\dots (۳)$$

(۳) میں "دوسرا مکملہ منفی ہے کیونکہ م ک' م ک' مثبت ہے اور فرلا قوس منفی ہے جیسے
 ت، ت سے ت تک بڑھتا ہے۔ جب ت، ت منحنی کی قوس کو تعبیر کرے

تو فرلا قوس اس راویہ کی جیب اتمام ہوتی ہے جو (لا، کا) پر کا ماس محور لا

کے ساتھ بناتا ہے۔ یہ زاویہ ایسے ناپا جاتا ہے جیسے دفعہ ۹۲ حصہ اول میں بہم (۳)
 کے دو مکملوں کو ایک تکملہ میں لکھ سکتے ہیں، اس طرح بند منحنی کے رقبہ کے لئے جملہ
 حاصل ہوتا ہے

کے $\frac{1}{2}$ فرٹ فرٹ (۴)

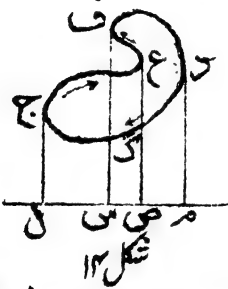
بطور مثال آئیے فرض کرو کہ جے جے حرکت کرتا ہے

$$1 = \frac{(لا - ہ)}{عہ} + \frac{(ما - گ)}{بہ} =$$

رکھو لا = ہ - عہا جم ت، ما = گ + بہا جت
جب ت صفر ہے ۲ آئیے بتا ہے تو نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد سمت
جے جے حرکت کرتا ہے، میں سفر کرتا ہے، رقبہ

$$= \text{کے (گ + بہا جت) عہا جت فرٹ} = \text{عہا بہا جت فرٹ}$$

$$\pi عہ بہا$$



یہ قید کہ خط مستقیم منحنی کو دو سے زیادہ
نقطوں پر نہیں کاٹتا با آسانی ہٹا
دی جاسکتی ہے -

مثلاً جب نقطہ (لا، ما) منحنی پر
تیروں کی سمت میں حرکت کرتا ہے تو
نقطہ کا معین یہ رقبہ عبور کرتا ہے

ل جے ع ص - س ف ع ص + س ف ح م ل جے ح م

جو میرے منحنی سے گھر ہوئے رقبہ کے مساوی ہے - تو س ع ف کے گ جے جے پر $\frac{1}{2}$ فرٹ

منحنی ہے، اسلئے متناظر تکمیل بھی منحنی ہیں، پس رقبوں س ف ع ص ل جے ح م کے
کے پہلے منحنی علامت لکھی گئی ہے -

ہم (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے تھے - $\text{کے م م م فرلا} - \text{کے م م م فرلا}$

اگر نقطہ (لا، ما) مخنی کے گرد سمت ج ک ب حرکت میں محیط پر سے پورا حرکت کر جائے جبکہ ت سے ت تک بڑھے تو مخنی کا رقبہ ذیل کے جملہ سے بھی تغیر ہوگا۔

- ک ما فرما فرت (۴)

رقبہ جو (۴) یا (۴) سے حاصل ہوتا ہے وہ ایک مثبت عدد ہے۔ لیکن اگر ہم رقبہ

کو بھی علامت والی مقدار خیال کریں تو مکملہ ک ما فرما فرت (۵)

ہر صورت میں مخنی کے رقبہ کا جبر یہ ناپ ہوگا جبکہ اسے مخنی کے محیط کے گرد اگر دلیا جائے یعنی ت کے حدود ایسے ہوں کہ نقطہ (لا، ما) ایک دفعہ مخنی کے محیط کے گرد پورا چکر لگا سکے۔ جسے ہم نے اوپر ضابطے (۴) اور (۴) حاصل کئے ہیں بالکل اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مکملہ

ک لا فرما فرت (۶)

رقبہ کا جبر یہ ناپ ہے جبکہ اسے مخنی کے پورا گرد لیا جائے۔ ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ جب ت سے ت تک بڑھتا ہے تو نقطہ سمت ج ک ب حرکت میں مخنی کے گرد حرکت کرتا ہے اگر اس سمت کے لئے مکملہ (۵) مثبت ہے اور (۶) منفی یعنی

ک ما فرما فرت = - ک لا فرما فرت

تو جب نقطہ سمت ج ک ب حرکت میں حرکت کرے گا تو (۵) منفی ہوگا اور (۶) مثبت۔

نقطہ (لا، ما) کی سمت حرکت بالکل اختیاری ہے۔ ریاضی طبیعیات میں یہ دستور بن گیا ہے کہ جب ت کے بڑھنے کے ساتھ مشاہدہ کرنے والا مخنی کے محیط کے گرد اس سمت میں حرکت کرے جس میں کہ کل رقبہ اس کے بائیں جانب رہتا ہے تو اس طرح رقبہ کے ناپ کے لئے جو عدد حاصل ہوا اُسے مثبت قرار دیتے ہیں۔ اگر ہم یہ دستور اختیار

کریں تو بند نمئی کے رقبہ کے لئے مائل ہوتا ہے

$$۱ = \frac{\text{ک لا مر کا}}{\text{مر کا}} = \frac{\text{ک لا مر کا}}{\text{مر کا}} = \frac{۱}{۲} \text{ ک لا مر کا} - \frac{\text{ک لا مر کا}}{\text{مر کا}} \text{ (۱)}$$

جہاں تک مکملہ تمام نمئی کے گرد اُس سمت میں لیا گیا ہے جس میں ت بڑھتا ہے۔ تکملوں (۱)۔
تو اکثر اوقات مختصر اس طرح لکھتے ہیں۔

$$۱ = \frac{\text{ک لا مر کا}}{\text{مر کا}} = \frac{\text{ک لا مر کا}}{\text{مر کا}} = \frac{۱}{۲} \text{ ک لا مر کا} - \frac{\text{ک لا مر کا}}{\text{مر کا}} \text{ (۱)}$$

یہ تئید کہ سب محدود مثبت ہیں اب دور ہو سکتی ہے۔
جملات (۱) سے ہمیشہ رقبہ کا جبروت ناپ ملتا ہے۔



نکسل ۱۵

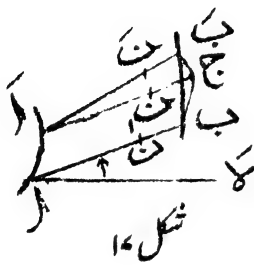


نکسل ۱۵

پس مذکورہ بالا دستور کو ہم آئندہ کے لئے مان لیتے ہیں، اس طرح رقبہ کی مثبت سمت
ہمیشہ کے لئے متعین ہو جاتی ہے یعنی ۱ کی قیمت جو (۱) سے معلوم ہوتی ہے اسکی علامت
مثبت ہوگی سمت ج ک د ک کے لئے اور نمئی ہوگی ج ک د ک کے لئے۔

اس سلسلہ میں وہ صدقہیں بھی شامل ہیں جن میں نمئی اپنے آپ کو کاٹتا ہے۔ مثلاً اگر نقطہ
ا پر آٹھ کی شکل پر تیروں کی سمت میں حرکت کرے تو تکملہ (۱) ۱ - ۱ کے مساوی
ہوتا ہے۔ دوسری شکل کے لئے تکملہ سے دونوں حلقوں کے رقبوں کا مجموعہ حاصل ہوگا
کیونکہ نمئی کے گرد جانے میں اندرونی طرفہ کا رقبہ دوبار شریک ہوتا ہے۔

۲۰۔ رقبہ جو ایک متحرک خط مستقیم اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے: فرض کرو کہ ΔABC خط مستقیم ہے جس کا طول l ہے اور اس کو نزدیک کے مقام ΔABC میں ہٹا دیا گیا ہے، اپنی حرکت میں یہ خط رقبہ ΔABC عبور کرتا ہے۔ یہ رقبہ مثبت ہوگا اگر محیط کے گرد سمت $\Delta B \rightarrow \Delta C \rightarrow \Delta A$ میں جانے سے یہ رقبہ مشاہد کے بائیں جانب رہے اور منفی ہوگا اگر یہ



دائیں جانب رہے۔
 ΔABC کو ΔABC کے
 ΔABC کو وتر ΔA کے
 متوازی سمجھو۔ فرض کرو کہ
 ΔA ایک ثابت خط کے
 متوازی ہے اور زاویے
 $\Delta A \rightarrow \Delta B \rightarrow \Delta C$

بالترتیب ΔA اور ΔB ΔC ہیں۔

صغاریات کے پہلے رتبہ تک رقبہ ΔABC ΔA (مف ΔA) متوازی الاضلاع ΔABC اور مثلث ΔABC کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
 ΔA کی حرکت دو حرکتوں سے مرکب ہے۔

- (۱) حرکت انتقالیت ΔABC تک۔
 - (۲) گھماؤ کی حرکت ΔA کے گرد مقام ΔB تک۔
- فرض کرو کہ متوازی الاضلاع کا ارتفاع h ہے، صغاریات کے پہلے رتبہ تک
 مف $\Delta A = l \cdot h + \frac{1}{2} l \cdot h$ مف ΔA (۱)
 فرض کرو کہ ΔABC میں کوئی ثابت نقطہ ΔA ہے۔

$\Delta A = l \cdot h = \Delta A$
 ΔA کی سمت کے عمود وار ΔA کا جو ہٹاؤ ہے اس پر غور کرو۔
 حرکت نقل کے لئے عمودی ہٹاؤ h ہے (نہ کہ ΔA) گھماؤ کی حرکت کے لئے ہٹاؤ l فر ΔA ہے۔ ΔA کا کل عمودی ہٹاؤ فرض کرو فر ΔA ہے۔

فرس = ف + ا مرعہ (۲)
 (۲) ف = فرس - ا مرعہ، اس کی وجہ سے (۱) ہو جاتا ہے

فری = ل فرس + (ل - ا ل) مرعہ (۳)

اگر متغیروں کو ت کے تفاعل فرض کیا جائے جیسا دفعہ ۱۹ میں تو

فری = ل فرس + (ل - ا ل) مرعہ (۴)

مساوات (۴) بالکل عام ہے بشرطیکہ متغیروں کو مناسب علامات دی جائیں۔

فرس، فرس دونوں مثبت ہونگے جبکہ ح کی حرکت ایک ایسے مثلاً

کے بائیں طرف ہو جو ا ب کی سیدھ میں ا سے ب کی طرف دیکھ رہا ہو۔
 مثبت گھماؤ عہ، مخالف سمت ساعت ہوگی۔ مستقل ا مثبت ہوگا جبکہ ح ا ب
 پر واقع ہو یا ا ب محدودہ پر جبکہ ا سے ب میں سے خارج کیا جائے اور منفی ہوگا
 جبکہ یہ ا ب محدودہ پر ا سے بے واقع ہو۔

یہ ت سے ت تک بڑھتا ہے، ا ب کا رقبہ عبور کردہ

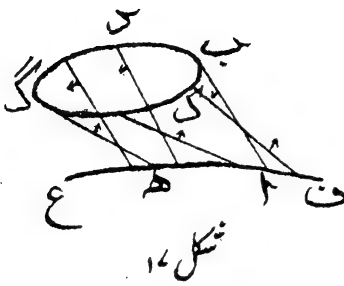
حی = ل فرس + (ل - ا ل) مرعہ (۵)

ل = ل س + (ل - ا ل) مرعہ (۵)

جہاں میں اثنائے حرکت میں ح کا کل عمودی ہٹاؤ ہے اور عہ، عہ زیادہ
 عہ کی ابتدائی اور آخری قیمتیں ہیں۔ س بالعموم وہی نہیں ہوتا جو ح کے طریق
 کا طول ہے۔

اب فرض کرو کہ ح ایک بند منحنی ج مرسم کرتا ہے، اس منحنی کا رقبہ بھی
 ج ہے۔

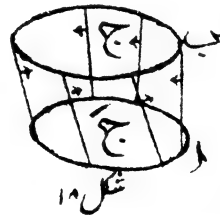
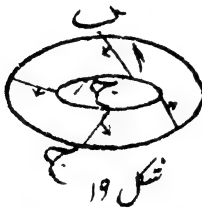
رتبہ جو ایک متحرک خط مستقیم پر حرکت میں ہو کر رہتا ہے



(۱) جب 'ج' بنی جگہ کا پورا چکر لگاتا ہے تو فرض کرو کہ 'د' قوس 'ع' پر آگے پیچھے حرکت کر کے اپنے ابتدائی مقام پر آجاتا ہے جبکہ 'ب' اپنے ابتدائی مقام پر آجائے۔ پس (۵) میں 'ع' = 'د' اور 'ج' محض 'ج' کے مساوی ہے۔ اس طرح

ج = ل س جہاں 'س' 'ج' کا کل عمودی ہٹاؤ ہے، کیونکہ میرے تکرار (۵) رتبہ 'ب' کا گ 'ه'۔ رتبہ 'ب' کا گ 'گ' 'ه' کو تعبیر کرتا ہے۔ اس صورت میں 'س' 'ا' پر منحصر نہیں یعنی 'ب' پر جو 'ج' کا مقام ہے 'س' اس پر منحصر نہیں ہے۔

(۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ جب 'ب' 'ج' کے محیط کا پورا چکر لگاتا ہے تو 'ا' ایک بند بنی جگہ کے گرد پورا دور کر جاتا ہے۔



اگر 'ج' 'ج' کے باہر ہو (شکل ۱۸) تو 'ع' اور 'د' باہم مساوی ہونگے، مساوات (۵) کا بائیں رخ 'ل' 'س' ہوگا، لیکن 'ب' کا عبور شدہ رتبہ 'ج'۔ 'ج' ہوگا پس 'ج'۔ 'ج' = ل س (۴) لیکن اگر 'ج' 'ج' کا پورا احاطہ کر لے (شکل ۱۹) تو 'ع' = 'د' = ۲۲

اس لئے ج - ج = ل س + πr (۱ - ل) (۸)
اعداد ج، ج کی علامتیں دفعہ ۱۹ (د) کے دستور کے موافق حاصل ہوتی ہیں۔

۲۱ - سطح پیم - بند منحنی کا جلی طریق پر رقبہ نکالنے کے لئے بہت سے آلات

ایجاد کئے گئے ہیں۔ مذکورہ بالا دو دفعات میں اجمالی طور پر وہ اصول بنائے گئے ہیں جن سے بہت سے آلات کی بناوٹ مبنی ہوتی ہے۔ سب سے مشہور ایک مسلک قطبی سطح پیم ہے جس کی بناوٹ کا مختصر ذکر یہاں کیا جائے گا۔

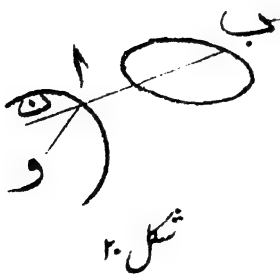
قطبی سطح پیم دو سلاخیں **و** اور **ا** ج ہوتی ہیں جو **ا** پر آزادانہ طریق سے جڑی ہوئی ہوتی ہیں، سلاخ **و** ایک ثابت نقطہ **و** کے گرد گھومتی ہے۔ اگر **ا** ایک بند منحنی کو مرسم کرے تو **ا** ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے۔ جب **ا** صرف دائرہ کے محیط پر آگے چلے حرکت کرے اور پورا پیکر نہ لگائے تو جس بند منحنی کے محیط پر **ا** گردش کرتا ہے اس کا رقبہ بموجب دفعہ ۲۰ (۶) ل س ہوتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ **ا** پر جو **ا** کا مقام ہے س اس پر منحصر نہیں ہوتا۔

س کو معلوم کرنے کے لئے ایک پیہہ جس کا محور **ا** کے متوازی ہوتا ہے **ا** کے ساتھ لگا ہوا ہوتا ہے۔ جیسے **ا** منحنی کے محیط پر حرکت کرتا ہے یہ پیہہ کچھ پھسلتا ہے اور کچھ لڑکتا ہے۔

پھسلنے اور لڑکنے کی حرکتیں باہم بے تعلق ہوتی ہیں یعنی پھسلنے کے وقت پیہہ محور کے گرد نہیں پھرتا۔

پس **ا** کا عمودی پیمانہ
= پیہہ کا محیط πr ان گردنوں کی تعداد جو بند منحنی کے گرد **ا** کی اٹائے حرکت میں پیہہ لگاتا ہے۔

یعنی س = πr ر ن



شکل ۲۰

ایک تختی پر ن کی قیمت خود بخود درج ہوتی جاتی ہے، ن صحیح یا کسر ہو سکتا ہے۔
اگر ہم تختی ج سے کو اتنا بڑا فرض کریں کہ $\frac{1}{2}$ نصف قطر والا دائرہ بالکل اس کے اندر
واقع ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ (۸)

$$\text{ج} - \pi = \frac{1}{2} \pi + \pi = \pi \quad \text{س} + \pi = \frac{1}{2} \pi + \pi = \pi \quad (\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi)$$

یعنی ج = $\frac{1}{2} \pi + \pi$ رن $\pi + \pi = \frac{1}{2} \pi + \pi = \pi$ و $\frac{1}{2} \pi$ کیونکہ س = $\pi + \pi$ رن
اس جملہ میں سوائے ن کے اور سب اعداد آلہ کے مستقلات ہیں۔ اس مضمون پر مزید
معلومات کے لئے ملاحظہ ہو ہنسر لسی کی ”رپورٹ سطح پیاؤں پر“ برٹش ایسوسی ایشن
رپورٹ ۱۸۹۲ء۔

دفعات ۱۹، ۲۰ کا طریق ثبوت فی الحقیقت اپیل (Appell) کا ہے جو اس نے

اپنی کتاب مبانیات ریاضی تحلیل Elements d' Analyse Mathematique
میں دیا۔

مشق ۷

۱۔ ثابت کرو کہ قطبی محدودوں میں ایک بند تختی کا رقبہ مکملہ

$$\frac{1}{2} \pi \text{ رقبہ}$$

سے حاصل ہوتا ہے جبکہ تکمیلہ کو پورے عجیب گے گرد لیا جائے، اس نتیجہ کو ثابت کرو
(۱) رقبہ دریافت کرنے کے لئے جو قطبی ضابطہ ہے اسے استعمال کرنے سے

(۲) دفعہ ۱۹، (۷) میں جو آخری تکملہ ہے انہیں لا = رجم طما، کا = رجب طما

رسمت تبدیل کرنے سے۔ [دیکھو مشق ۱۲، سوال ۱۵ حصہ اول]

۲۔ مثلث و اب کے اُسوں کے خود ترتیب و اب میں بالترتیب

(۰)، (۱)، (۲)، (۳)، (۴)، (۵)، (۶)، (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷)، (۱۸)، (۱۹)، (۲۰)، (۲۱)، (۲۲)، (۲۳)، (۲۴)، (۲۵)، (۲۶)، (۲۷)، (۲۸)، (۲۹)، (۳۰)، (۳۱)، (۳۲)، (۳۳)، (۳۴)، (۳۵)، (۳۶)، (۳۷)، (۳۸)، (۳۹)، (۴۰)، (۴۱)، (۴۲)، (۴۳)، (۴۴)، (۴۵)، (۴۶)، (۴۷)، (۴۸)، (۴۹)، (۵۰)، (۵۱)، (۵۲)، (۵۳)، (۵۴)، (۵۵)، (۵۶)، (۵۷)، (۵۸)، (۵۹)، (۶۰)، (۶۱)، (۶۲)، (۶۳)، (۶۴)، (۶۵)، (۶۶)، (۶۷)، (۶۸)، (۶۹)، (۷۰)، (۷۱)، (۷۲)، (۷۳)، (۷۴)، (۷۵)، (۷۶)، (۷۷)، (۷۸)، (۷۹)، (۸۰)، (۸۱)، (۸۲)، (۸۳)، (۸۴)، (۸۵)، (۸۶)، (۸۷)، (۸۸)، (۸۹)، (۹۰)، (۹۱)، (۹۲)، (۹۳)، (۹۴)، (۹۵)، (۹۶)، (۹۷)، (۹۸)، (۹۹)، (۱۰۰)

ثابت کرو کہ لمباز علامت اور مقدار مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2} \pi$ (لا مفا، مفا مفا) = (لا مفا، مفا مفا) ہے۔

اس نتیجہ کی مدد سے مثال ماقبل کا مسئلہ حاصل کرو۔

۳۔ مکانات مفا = $\frac{1}{2} \pi$ لا، لا = $\frac{1}{2} \pi$ مفا کا مشترک رقبہ معلوم کرو۔

۴۔ متطارب مفا = $\frac{1}{2} \pi$ محور صا اور تختی مفا (لا، لا) = $\frac{1}{2} \pi$ کی اس شلخ کے

اٹلہ ۶، ۷ سے منہی ۱ = ۱ + ب جم طہ کی نوعیت کا پتہ چلتا ہے
جیکہ ۱ کے ب اور ۱ کے ب۔

۸۔ بتاؤ مساوات ف (م لا 'ن ما) =۔ والا منہی جہاں م، ن مستقل ہیں
ف (لا 'ما) =۔ سے کیسے حاصل ہو سکتا ہے۔ اگر دو سرانہ منہی بند حلقہ ہو تو پہلا ہی
بند ہوگا اور ف (م لا 'ن ما) =۔ کا رقبہ ف (لا 'ما) =۔ کے رقبہ کے مساوی
ہوگا جیکہ موخر الذکر کو م ن پر تقسیم کر دیا جائے۔

فرض کرو کہ م لا = لا 'ن ما = ما، اس لئے لا فرما = م ن لا فرما
اب دفعہ ۱۹ (۷) کو استعمال کرو۔ لا فرما کا مکملہ منہی ف (لا 'ما) =۔ کے
اگر (جو وہی بات ہے کہ لا فرما کا مکملہ منہی ف (لا 'ما) =۔ کے گرد)
مساوی ہوگا م ن لا فرما کے مکملہ کے جیکہ ایسے منہی ف (م لا 'ن ما) =۔
کے گرد لیا جائے یعنی لا فرما کا مکملہ منہی ف (لا 'ما) =۔ کے گرد مساوی ہے
اس رقبہ کا م ن گنا جو منہی ف (م لا 'ن ما) =۔ سے گھرا ہوا ہے (کیونکہ
م ن مستقل ہے اور لا فرما کا مکملہ رقبہ ہے)

۹۔ مشق ۶ مثال ۵ پر مثال بالا کا طریقہ استعمال کرنے سے منہی

$$(م لا 'ن ما) = ۱ + لا + ب ما$$

کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۰۔ جب ۱ (ب) (دفعہ ۲۰) ایک گردش پوری کرتا ہے تو ف ایک ایسا
منہی مرتبہ کرتا ہے جس کا رقبہ ج ج ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

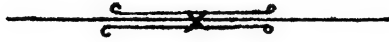
$$(۱) ج = \frac{(۱ ج + ب ج)}{ب + ۱} - ۱ ب$$

جہاں ۱ (ب) = ب اور ۱ (ج) = ج سے وہی مقداریں تعبیر ہوتی
ہوتی ہیں جن کا دفعہ ۲۰ میں ذکر ہوا۔

نیز ثابت کرو کہ اگر سرے ۱ (ب) ایک بند مضبوطی منہی ج ج پر حرکت کریں تو

$$(۲) ج - ج = ۱ ب [ہولڈ ج کا مسئلہ]$$

مسادات (۸) دفعہ ۲ کو استعمال کرو۔ رکھو ل = ل + ب، اس طرح ج-ج ج
 حاصل ہوگا، پھر رکھو ل = ل + جس سے ج-ج-ج حاصل ہوتا ہے۔
 س کو سا فظ کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا۔ (۲) حاصل کرنے کے لئے ان
 اور ب-ن کے عبور کردہ رقبون پر غور کرو۔



ع ح ا ع ح ا ع ح ا محو لا کے متوازی ہیں۔

صیرم حاصل جمع (۱) مستطیلوں ل ح ا ل ح ا ل ح ا ل ح ا ل ح ا
 کے رقبوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے
 مستطیلوں کا یہ رقبہ رقبہ کل م ط ع سے کم رہتا ہے بقدر ذیل کے کروٹوں

کے مجموعہ کے ع ح ا ع ح ا ع ح ا ع ح ا ح ط۔

ع ح ا کو ل م کے متوازی کھینچو یہ خط م ط کو ح ا پر کاٹتا ہے۔ ع ح ا کو

ف تک اتنا خارج کرو کہ د ف ذیلی رقبوں ل ل ل ل ل میں سے

سب سے بڑے کے مساوی ہو۔ مستطیل حرف گ ط کی تکمیل کرو۔

فرض کرو کہ رقبہ ل م ط ع ح ا سے تعبیر ہوتا ہے تب می اور
 مجموعہ (۱) کا فرق کم ہے ذیل کے ن مستطیلوں کے مجموعہ سے

ع ح ا ع ح ا ع ح ا ع ح ا ح ط

یعنی کم ہے مستطیل حرف (ح ا ع ح ا ع ح ا ح ط) سے

یعنی کم ہے حرف ح ط سے

یعنی کم ہے حرف { ف ا (ب) - ف ا (ر) } سے۔

اگر ن لا انتہا بڑھے اور اسی آن میں ہر ذیلی وقفہ لا انتہا کم ہو تو انتہا میں حرف
 سفر ہوگا اور (۱) کی انتہا می ہوگی۔ اس لئے

ن ب لا = ب ف ا (لا) م ف لا = می = رقبہ ل م ط ع (۳)

البتہ ہم کلمہ کہہ سکتے ہیں ب لا = ب ف ا (لا) م ف لا = می تقریباً

لا = ب

یہ قیود جو ابتدائیں لگائی گئی تھیں کہ فا (لا) مثبت ہے، بڑھنے والا تفاعل ہے اور ا کم ہے ب سے، یہ اب ہشاد دی جا سکتی ہیں۔

اگر ۱ > ب اور فا (لا) مثبت اور گھٹنے والا تفاعل ہو تو ا د پر کے عمل میں تبدیلی صرف اتنی ہوگی کہ محی مجموعہ (۱) سے کم ہو گا۔ اگر فا (لا) کہیں بڑھتا ہو اور نہیں گھٹتا ہو تو فا (لا) کے بڑھنے اور گھٹنے کی صورتوں کے لئے نتائج کو الگ الگ صحیح تسلیم کر کے عام صورت میں ان کو باہم ملایا جا سکتا ہے۔

اگر ۱ < ج اور فاک (لا) مثبت ہو تو ہر ایک فرق (لا - ل) (لا - لا) ...
منفی ہوگا اور اس صورت میں بھی انتہا لینے سے منحنی کا رقبہ معلوم ہوگا مگر اسکی علامت منفی
ہوگی۔

آخری صورت میں اگر فَا (لا) منفی ہو تو انتہا لینے سے منحنی کا رقبہ ملے گا بشرطیکہ دفعہ ۸۰ حصہ اول کے موافق مناسب علامت منتخب کی جائے۔

اگر ہم چاہیں تو ذیلی وقفوں کو باہم مساوی خیال کر سکتے ہیں، ایسی صورت میں ہر وقفہ $\frac{1}{n}$ کے مساوی ہوگا۔ ذیلی وقفوں پر فقط اتنی قید ہے کہ ہر وقفہ

کو انتہا میں صفر ہو جانا چاہیے جبکہ ن انتہا میں لامتناہی ہو جائے۔

مجموعہ (۱) میں ہم نے فرض کیا ہے کہ فاد (لا) ہر وقفہ میں شروع کی قیمت اختیار کرتا ہے لیکن اگر یہ ہر وقفہ کے آخر کی یاد دہیاں کی کوئی قیمت اختیار کرے تو بھی وقفہ ۸ مسئلہ ۲ حصہ اول کی مدد سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اتنا ہی رہتی ہے ہم صرف اس صورت پر غور کرتے ہیں کہ ΔB اور فاد (لا) نسبت ہے کیونکہ باقی صورتیں اس سے باآسانی مستنبط ہو سکتی ہیں۔

اگر 'لا'، 'لا'، 'لا' لا کی قیمتیں ہوں بالترتیب و تقوّل
(لا-لا)، (لا-لا)، (لا-لا) کے آخریاد میان میں تو ہم
لے سکتے ہیں

گہر = فا (و) (ل- و) بی = فا (لا) (ل- لا)
گہر = فا (و) (ل- و) کب = فا (ل) (ل- لا)

اور مسئلہ مذکورہ کے شرائط عائد ہوتے ہیں کیونکہ فاعلاً مسلسل ہے اور ن ← ∞

کے لئے جیسا، جیسا، میں سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے۔

یہ ثابت کرنے کے بعد کہ (۱) کی انتہا رقبہ صحیح ہے ہم حسب دفعہ ۸۸ حصہ اول ثابت کر سکتے ہیں کہ اس انتہا کا مشتق بلحاظ ج کے صراط یعنی فارادے۔
تکمیلوں کے متعلق جملہ مسائل مجموعہ (۱) کی انتہا پر استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ اب
تکمیلوں کی عام ترتیم کی وجہ ظاہر ہے، لفظ ”مجموعہ“ کا ابتدائی حرف میم ہے، مگر
یہ یاد رہے کہ تکمیلہ مجموعہ نہیں ہے لیکن مجموعہ کی انتہا ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۳ مثال ۲)

یعنی ف (لا + مف لا) - ف (لا) = ف (لا) مف لا + عہ مف لا

(۱).....

جہاں عہ مف لا کے ساتھ معدوم ہو جاتا ہے۔

(۱) میں کے لا اور مف لا کو بالترتیب دفعہ ۲۲ کی قیمتیں دو - لا کی تمام قیمتوں کے لئے بالعموم عہ کی وہی قیمت نہیں ہوگی اس لئے ہم لاحق استعمال کرتے ہیں پس

ف (لا) - ف (۱) = ف (۱) مف لا + عہ مف لا

ف (لا) - ف (لا) = ف (لا) مف لا + عہ مف لا

ف (لا) - ف (لا) = ف (لا) مف لا + عہ مف لا

ف (ب) - ف (لا) = ف (لا) مف لا + عہ مف لا

جمع کرنے سے ف (ب) - ف (۱) = $\sum_{لا=۱}^{لا=ب} ف (لا) مف لا + عہ$

جہاں $عہ = عہ مف لا + عہ مف لا + \dots + عہ مف لا$

فرض کرو کہ مقادیر عہ، عہ، میں سے عہ تعداد سب سے بڑا ہے تب عددی قیمت کے لحاظ سے

$عہ > عہ (مف لا + مف لا + مف لا + \dots + مف لا) + عہ (ب)$

چونکہ ہر عہ اور اس لئے ہر عہ کی انتہا صفر ہے اس لئے $عہ$ کی انتہا بھی صفر ہوگی پس نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۳ - $n \rightarrow \infty$ کے لئے

$$\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}$$

کی انتہا معلوم کرو۔

ہم اس مجموعہ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+4}$$

$$\text{یا اس طرح سے } \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} \quad \text{جسے } \frac{1}{n(n+1)} \text{ کہتے ہیں}$$

تفاعل فار (لا) = $\frac{1}{n}$ پر غور کرو۔ دفعہ ۲۲ میں فرض کرو کہ ہر فرق $\frac{1}{n}$ ہے۔
فرض کرو کہ ۱ = 'ا'، ۲ = 'ب' اور ہر مجموعہ اسی طرح کا سلسلہ ہوگا جیسا (۱) دفعہ
۲۲ ہے اگر ہم فار (لا) کی قیمتیں ہر وقفہ کے آخر کی فرض کریں۔

$$\text{پس مطلوبہ انتہا ہے } \int \frac{1}{x} dx = \ln x = \text{لوگ لا} = \text{لوگ } 2 = 0.693$$

۲۴۔ تقریبات۔ مکملہ کی قیمت معلوم کرنے میں بالعموم پہلے وہ تفاعل معلوم کیا جاتا ہے جس کا مشتق معلومہ شکل ہو۔ اب اگر یہ تفاعل معلوم نہ ہو سکے تو یہ طریقہ ناکام رہیگا۔ ایک مشہور صورت جس میں یہ طریقہ استعمال نہیں ہو سکتا طبعی مثالوں میں پیدا ہوتی ہے جہاں شکل کے لئے تجزیاتی جملہ معلوم ہونے کی بجائے اس کا گراف معلوم ہوتا ہے اس لئے جب متکمل کی قیمتوں کی صرف محدود تعداد معلوم ہو تو اس صورت میں بھی مکملہ کی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے طریقے ایجاد کئے گئے ہیں۔ یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ شکل کو ایک مسلسل تفاعل متصور کیا جاسکتا ہے اگرچہ اس کی قیمتوں کی صرف محدود تعداد معلوم ہونے کی وجہ سے تفاعل کے لئے تجزیاتی جملہ معلوم نہیں ہو سکتا۔ جو طریقہ اب بیان کئے جائینگے وہ تجزیاتی شکل کے تفاعل کے لئے بھی استعمال ہو سکتے ہیں اگرچہ ایسی صورت میں زیادہ قوی طریقہ میسر آسکتے ہیں بالخصوص سلسلوں میں پھیلانے کا طریقہ۔

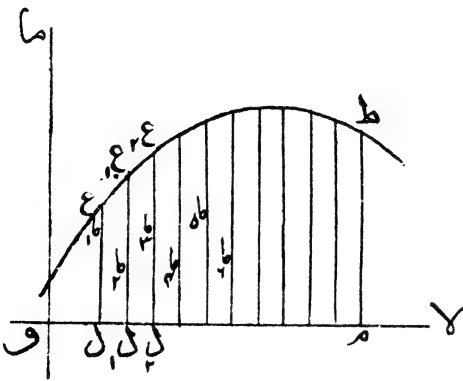
فرض کرو کہ لی م کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ہر حصہ h کے مساوی ہے۔ نیز فرض کرو لی م اور باقی (ن - ۱) نقاط تقسیم پر کے معین $ما، ما، ما، ...$ معلوم ہیں۔

تکمیلہ $ما، فا (لا) فرلا ... (۱)$

کے محسوب کرنے سے یہی مراد ہے کہ رقبہ لی م ط ع معلوم کیا جائے [شکل ۲۳]
تقریب کی بجائے فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ع ع ع ع ہے پہلے منحنی
کا رقبہ $\frac{1}{2} h (ما + ما)$ ہے اور یہ رقبہ لی م ط ع کے متناظر ٹکڑے کے
رقبہ سے بہت تھوڑا کم ہو گا۔ ان سب منحنیوں کو جمع کرنے سے اس رقبہ لی م ط ع
کی اور اسلئے تکمیلہ (۱) کی تقریبی قیمت معلوم ہوتی ہے

$$ق = \frac{1}{2} h (ما + ما) + \frac{1}{2} h (ما + ما) + \dots + \frac{1}{2} h (ما + ما) + \frac{1}{2} h (ما + ما) \quad (۱)$$

$$= \frac{1}{2} h \{ ما + ما + ۲(ما + ما + \dots + ما + ما) + ما \} \quad (۲)$$



شکل ۲۳

اگر تقریب انہی طول میں
سراسر اوپر کی طرف
محدب ہو جیسے شکل
۲۳ میں توفیق اصلی
رقبہ سے کم رہے گا
اور اگر منحنی اوپر کی طرف
مقعّر ہو توفیق رقبہ
سے بڑھ جائے گا۔
جفت معینوں
 $ما، ما، ...$ کے

سروں میں سے ماس کھینچو اور انہیں اتنا خارج کرو کہ یہ متصلہ طاق معینوں سے جا کر ملیں۔ اگر کل معینوں کی تعداد طاق ہو یعنی ۲ ن + ۱، تو اس طرح ن منحرف حاصل ہونگے جن کا مجموعہ ۱ مطع سے زیادہ ہوگا جب گران بالتمام اوپر کی طرف معدب ہو۔ پہلے منحرف کا رقبہ ۲ ہر ملہ ہے، دوسرے کا ۲ ہر ملہ اور علیٰ ہذا لقیاس اس لئے رقبہ زیر بحث کا ہمیں ایک اور تقریب حاصل ہوتا ہے

$$ق = ۲ ہر (ملہ + ملہ + + ملہ) (۳)$$

تکملہ (۱) کی قیمت ہمیشہ ق اور ق کے درمیان واقع ہوتی ہے جبکہ قوس ع ط پر کوئی نقطہ انعطاف نہ ہو اور ہر تقریب کے لئے فرق $\pm (ق - ق)$ غلطی یا خطا کا ناپ ہوگا۔

ضابطہ (۲) کو ذو زلفہ قاعدہ کہا جاسکتا ہے۔

ایک اور ضابطہ جو عملی طور پر (۲) یا (۳) کی نسبت زیادہ صحیح ثابت ہوتا ہے اس طرح حاصل ہو سکتا ہے، دفعہ ۲ حصہ اول کی رو سے ہم لکھ سکتے ہیں

$$فاد (لا) = فاد (ج) + (لا - ج) فاد (ج) + \frac{1}{4} (لا - ج) فاد (لا)$$

اگر لا - ج چھوٹا ہو تو ہم یہ مان سکتے ہیں کہ فاد (لا) کا فرق فاد (ج) سے بہت کم ہے، اگر فاد (لا) دوسرے درجہ کا ہو تو فاد (لا) فاد (ج) کے بالکل مساوی ہوگا۔

$$اب مساوات کا = فاد (ج) + (لا - ج) فاد (ج) + \frac{1}{4} (لا - ج) فاد (ج) (۴)$$

ایک مکانی کو تعبیر کرتی ہے، پس فاد (لا) کی ترمیم کے ایک چھوٹے سے طول کی بجائے ہم اس مکانی کی قوس رکھ سکتے ہیں۔

اب دوہرے ٹکڑے ل ل ع ع پر غور کرو، سہولت کی خاطر فرض کرو کہ

$$ول = ج، ول = ج - ہ، ول = ج + ہ، اب یہ تسلیم کر کے$$

کہ قوس ع ع ع پر فاد (لا) کی قیمت (۴) کو استعمال کرنے سے حاصل

ہو سکتی ہے ہمیں رقبہ $ل, ع, ع$ کے لئے حاصل ہوتا ہے
 $\frac{1}{3} \text{ فار (لا) فرلا} = \frac{1}{3} \text{ فار (لا+ج) فرلا} = \frac{1}{3} \text{ فار (ج) فرلا} = \frac{1}{3} \text{ فار (ج) فرلا} + \frac{1}{3} \text{ فار (ج) فرلا}$

جہاں تکمیل کرنیکے لئے ہم رکھتے ہیں $لا = لا+ج$ ۔ یہ تسلیم کر کے کہ فار (لا) کی قیمت
 (۴) سے حاصل ہوتی ہے ہم (۵) کو $ما, ما, ما$ کی رقم میں بیان کر سکتے ہیں۔
 کیونکہ فار (ج) = $ما$ اور

$$ما = فار (ج-ہ) = فار (ج) - ہ فار (ج) + \frac{1}{3} ہ فار (ج)$$

$$ما = فار (ج+ہ) = فار (ج) + ہ فار (ج) + \frac{1}{3} ہ فار (ج)$$

جمع کرنے سے

$$ہ فار (ج) = (ما + ما - ۲ فار (ج)) = ما + ما - ۲ ما$$

اور (۵) ہو جاتی ہے $\frac{1}{3} ہ (ما + ما + ۲ ما) = \frac{1}{3} ہ (۴ ما) = \frac{4}{3} ہ$ ۔

اب فرض کرو کہ رقبہ $ل, ع, ع$ کو متساوی الفضل معینوں کی طاق تعداد
 $۲ن+۱$ سے ٹکڑوں کی جفت تعداد $۲ن$ میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ضابطہ (۶) کو سلسلہ وار
 $ن$ دہرے ٹکڑوں کے لئے استعمال کرنے سے $ن$ جملوں کا مجموعہ حسب ذیل حاصل
 ہوتا ہے، رقموں کو نئی ترتیب کے موافق لکھا گیا ہے

$$قی = \frac{1}{3} ہ \{ ما + ما + ۱ + ۲ (ما + ما + + ما + ما - ۱) \}$$

$$+ ۲ (ما + ما + + ما + ما) \} \dots (۷)$$

(۷) سس کا ضابطہ کہلاتا ہے۔ الفاظ میں اسے یوں بیان کر سکتے ہیں، رقبہ کو
 متساوی الفضل معینوں سے ٹکڑوں کی جفت تعداد میں تقسیم کرو۔

(۱) شروع اور اخیر کے معینوں کا مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) باقی ماندہ طاق معینوں کے مجموعہ کا دوچند معلوم کرو۔

(۳) جفت معینوں کے مجموعہ کا چار گنا معلوم کرو۔
ان تین مجموعوں کو جمع کرو اور اس حاصل جمع کو معینوں کے مشترک فاصلہ کے ایک تہائی سے ضرب دو۔

فرض کرو کہ $a + b = c$

$$b_1 + \dots + b_4 + b_5 = 9$$

$$1 - \frac{b}{r} + \dots + \frac{b}{r} + \frac{b}{r} =$$

تب ہ، ع، و، ر کی رقومیں

$$ق_1 = \frac{1}{4}h(6 + 2r_2 + r_1) \quad ق_2 = h_2$$

$$Q = \frac{1}{3} \text{ هـ } (6 + 9 + 12)$$

اس لئے $Q_1 = \frac{2}{3}Q + \frac{1}{3}Q_2$ (۸)

فرض کرو کہ تزییم اوپر کی طرف مخاب ہے اور معین مثبت ہیں یعنی

ق. > ائبہ ل مطغ > ق.

$$\text{تب } ق_2 - ق_1 = \frac{1}{3} (ق_2 - ق_1)$$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{2}{3}(Q_1 - Q_2)$$

اس لئے سمن کے کلیہ میں غلطی یا خطا $\frac{1}{2}(ق-ق)$ یا $\frac{1}{2}ھ(و-و-۶-۲)$

اس ضابطہ کو بعض اوقات سمن کا دوسرا کلیہ کہتے ہیں۔
اسے ثابت کرنے کے لئے رکھو لا = لا + ہرت، تب فا (لا) کی شکل ہوگی
فما (رت) = جن + حق + ت + مرت + سی ت
اور ما، مام، مام، فمادت کی قیمتیں ہیں ت کی قیمتوں ۱۰، ۲، ۳
کے لئے اور رقبہ ہے

فما (لا) فرلا = ہرت فمادت (رت)

۶۔ ثابت کرو کہ

لوک جب لا فرلا = لا ہم لا فرلا

اور سمن کے کلیہ سے مکملہ کی قیمت معلوم کرو۔

مکملہ کی صحیح قیمت - ۲ لوک ہے۔

مکملہ کو ۷ سے تعبیر کرو۔ تب

۷۔ لوک جب لا فرلا = لوک جم لا فرلا = ۱/۲ (لوک جب لا + لوک جم لا) فرلا

پس ۷ = ۱/۲ لوک (۱/۲ جب لا) فرلا + ۱/۲ لوک جب ۲ لا فرلا

نیز ۱/۲ لوک جب ۲ لا فرلا = ۱/۲ لوک جب ہی فری = ۱/۲ لوک جب ہی فری

اور نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ ۱/۲ لوک مس لا فرلا = [عمل مکمل کی ضرورت نہیں۔]

۸۔ ثابت کرو کہ جب ن مال ہو تو ۱/۲ کی انتہا ۲ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ جب n مال بہ ∞ ہو تو $\frac{n}{n+1}$ کی انتہا $\frac{1}{2}$ ہے۔

۲۵۔ اوسط قیمتیں۔ n مقادیر $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ مال کا اوسط حسابی $\frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n}$ ہے۔ فرض کرو کہ n کی قیمتوں $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ ہوں۔

..... ب۔ h کے جواب میں $f(h)$ کی قیمتیں $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ ملی ہیں جہاں وقفہ h کو طول h کے n مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ کے اوسط حسابی کی انتہا جبکہ $n \rightarrow \infty$ تفاعل $f(h)$ کی اوسط قیمت کہلاتی ہے

سعت ب۔ h میں۔

اوسط قیمت کو بطور مکملہ کے بیان کر سکتے ہیں کیونکہ

$$\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n}{n} \right) = \left(\frac{f(h_1) + f(h_2) + f(h_3) + \dots + f(h_n)}{n} \right) \quad (۱)$$

اور بائیں جانب کی کسر کا شمار کنندہ

$f(h_1) + f(h_2) + f(h_3) + \dots + f(h_n)$ فار h (ب۔ h) کے لئے ہے اور اسکی انتہا $\rightarrow \infty$ (اور اس لئے $h \rightarrow 0$) کے لئے ہے

ج۔ فار h (ب۔ h) فرلا۔ پس اوسط قیمت ہے

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (۲)$$

مثال ۱۔ نیم قطر کے نصف دائرہ کے معین کی اوسط قیمت ہے

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi} = 0.3183$$

اس صورت میں قطر کو n مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ لیکن اگر نصف محیط کو n مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے اور تفاعل کا متغیر متبوع قوس $\sin x$ ہو جہاں $\sin x$ کے ایک سرے سے اس نقطہ تک لایا گیا ہے جہاں سے معین

گرایا گیا ہے تو چونکہ معین کا طول واجب طہ ہے اس لئے اوسط قیمت ہوگی

$$\frac{1}{1} \int \text{جب طہ لا فرطہ} = \frac{2}{11} \int = 1.056366$$

پس یاد رہے کہ اوسط قیمت کا ذکر کرنے میں متغیر متبوع کی تخصیص ضروری ہے۔

مثال ۲۔ سوستی منحنی کی صورت میں لا = ۰ سے لا = π تک (۱) اوسط معین (۲) اور معین کے مربع کا جو اوسط ہے اس کا جذر المربع معلوم کر دو۔

$$(۱) \text{ اوسط معین} = \frac{1}{\pi} \int \text{جب لا فرلا} = \frac{2}{\pi} \int = 1.056366$$

صورت (۲) میں تفاعل ہے ما اور ما کی اوسط قیمت

$$\frac{1}{\pi} \int \text{جب لا فرلا} = \frac{1}{4} \int$$

اور اس اوسط کا جذر المربع $\frac{1}{2} \int$ یعنی ۰.۵ ہے۔

متبادل برقی رو کے نظریہ میں کارآمد اوسط (۱) نہیں ہے بلکہ (۲) ہے، موزن لڈ کر کو اختصار معین کی اوسط مربع قیمت کہا جاسکتا ہے۔

اگر وقفہ ب۔ ا کو ن ذیلی وقفوں h_1, h_2, \dots میں تقسیم کیا جائے اور اگر ان وقفوں میں کے کسی نقاط پر بالترتیب f_1, f_2, \dots کی قیمتیں f_1, f_2, \dots مل جائیں تو جب n لا انتہا ہوگا (یعنی ہر ذیلی وقفہ h_i صفر ہوگا)

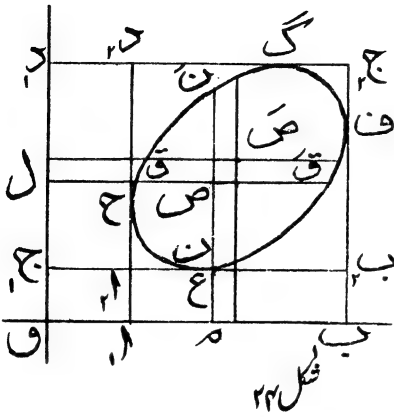
تو $f_1 h_1 + f_2 h_2 + \dots + f_n h_n$ کی انتہا وہی (۲) ہوگی۔

ب۔ ا

پس تکملہ (۲) کو ہم f_1, f_2, \dots کی اوسط قیمت کی تعریف خیال کر سکتے ہیں۔

۲۶۔ دوہرے تکملے

فرض کرو کہ f, g, h (شکل ۲۴) ایک مستوی منحنی ہے اور f, g, h (لا، ما، نا) منحنی کے اندر یا اوپر کے سب نقاط کے لئے ایک حید قیمت مسلسل تفاعل ہے۔ فرض کرو کہ f, g, h اور f, g, h کے گنگ محوین کے متوازی ماس ہیں۔ ہم مان لیتے ہیں کہ کوئی خط مستقیم منحنی کو دو سے زیادہ



نقطوں پر نہیں کاٹا۔
اگر کوئی منحنی اس شرط کو
پورا نہ کرے تو اسے
ایسے جزوی رقبوں
میں تقسیم کیا جاسکتا
ہے جن میں سے ہر ایک
اس شرط کو پورا کرے۔
فرض کرو کہ (ب) (ب)

کوم اور ج جسا تقسیم کیا گیا ہے اور نقاط تقسیم میں سے محوروں کے متوازی خط
کو ن ذیلی رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور نقاط تقسیم میں سے محوروں کے متوازی خط
کھینچے گئے ہیں۔ رقبہ ع ف گ ح اس طرح چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم
ہو جائیگا اگرچہ ع ف گ ح کے محیط کے نزدیک ان مستطیلوں کے ایسے نقاط
ہوں گے جو منحنی کے باہر واقع ہوں گے۔
فرض کرو کہ (ب) پر کے دو متصل نقاط تقسیم کے فصلے (لا، لا) + مف (لا، لا) ہیں
اور ج پر کے دو متصل نقاط تقسیم کے معین (مل، مل) + مف (مل، مل) اور
نقاط ص، ص کے محدود (لا، مل) (مل، لا) + مف (لا، مل) + مف (مل، مل)

مستطیل ص ص کے رقبہ مف (لا، مل) + مف (مل، لا) کو ف (لا، مل) کے
ساتھ ضرب دو جو ف (لا، مل) کی قیمت ص پر ہے، اس طرح سے حاصل جمع

ح ف (لا، مل) مف (لا، مل) مل (۱)

ع ف گ ح کے محیط اور اندر کے سب نقاط کے لئے مرتب کرد۔

[هندسی نقطہ نظر سے ی = ف (لا، مل) ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے۔

حاصل جمع (۱) کے نمونہ کی رقم ف (لا، مل) مف (لا، مل) مل اس

متوازی السطوح کا حجم ہے جس کا قاعدہ مستطیل صف لا صف مل ہے اور
ارتفاع اس نقطہ کا محی، محی دف (لا، مل) ہے جہاں نقطہ ص پر مجموعے
مستطیل پر کا عا د سطح سے ملتا ہے پس مجموعہ (۱) اس جسم کے حجم کو تقریباً تعبیر کرتا
ہے جو گھڑا ہوا ہے سطح ص = ف (لا، فا) سے، سطح مستوی لا و ص سے
اور اس اسطوانہ سے جو ایک خط مستقیم محیط ع ف گ ح کے گرد حرکت کرنے
سے پیدا کرتا ہے جبکہ یہ خط اثنائے حرکت میں ہمیشہ سطح لا و ص پر عمود رہے
[مقابلہ کرو اشکال ۲۸، ۲۹ حصہ اول کے ساتھ]

ہم (۱) کی انتہا معلوم کرنا چاہتے ہیں جبکہ م اور ن میں سے ہر ایک لا انتہا بڑھے
اور ساتھ ہی ہر جزو صف لا، صف مل اور اس لئے ہر رقبہ صف لا، صف مل
لا انتہا گئے۔ چونکہ (۱) میں دو طرح کے اعضاء ہیں ہم (۱) کو جائز طور پر دوہرے مجموعہ سے
تعبیر کر سکتے ہیں

33 ف (لا، مل) صف لا، صف مل (۲)

جہاں ایک 33 صف مل سے متعلق ہے اور دوسرا صف لا سے۔
پہلے لا اور صف لا کو مستقل رکھو یعنی ن ← ∞ کے لئے انتہا معلوم کرو

34 ف (لا، مل) صف مل

جو ایک متغیر (یعنی فا) کے کلمہ کی تعریف کے مطابق = م^ص ف (لا، فا) فرما
م^ص

(۳)

کلمہ (۳) میں لا، م^ص م^ص واقع ہونگے لیکن م^ص اور م^ص
دونوں منحنی ع ف گ ح کی مسادات کی وجہ سے و م^ص یعنی لا کے
تفاعل ہیں۔ اس لئے (۳) لا کا تفاعل ہے اور ف (لا) سے تعبیر ہو سکتا ہے۔
[ہندی نقطہ نظر سے ف (لا) مذکورہ بالا مجسم کی اس تراش کے منحنی کا رقبہ ہے

جو فن میں سے گزرنیوالی مستوی سطح جو لا و ما پر عمود وار ہے مجسم سے کاٹی ہے، اور اگر صفاریات کے صرف پہلے رتبہ کو ملحوظ رکھا جائے تو فن (لا) مف لا مجسم کے ایک ٹکڑے کا حجم ہے جس کی موٹائی مف لا ہے اس کے بعد م ← ∞ کے لئے انتہا معلوم کرو۔

نہا ح مف لا فنا (لا) = فن (لا) فرلا (۴)

پس (۱) کی انتہا تکملہ (۴) کے ذریعہ بیان ہو سکتی ہے اور یہ انتہا مذکورہ بالا مجسم کا حجم ہے۔ چونکہ فنا (لا) خود ایک تکملہ ہے، اس لئے جملہ (۴) دوہرہ تکملہ ہے اور یہ دوہرہ تکملہ اس علامت سے تعبیر ہو سکتا ہے

فن (لا) فرلا (۵)

(۴) کے طرز ثبوت سے ظاہر ہے کہ (۵) جو محض ضابطہ (۴) کی علامتی ترقیم ہے الفاظ میں اس طرح بیان ہو سکتا ہے۔ فن (لا) فرلا کو ملحوظ ما کے ما = فن سے ما = فن تک مکمل کرو اور اس عمل تکمیل میں لا کو مستقل قرار دو پھر حاصل کو ملحوظ لا کے لا = فر سے لا = جب تک مکمل کرو۔ ہم پہلے م کو پھر ن کو لا انتہا بنانے سے (۱) کی انتہا معلوم کر سکتے ہیں، اس صورت میں نتیجہ اس طرح بیان ہو گا

فن (لا) فرلا (۶)

(۶) میں عمل تکمیل پہلے ملحوظ لا کے کیا جاتا ہے اور اس عمل میں ما کو مستقل رکھا جاتا ہے پھر حاصل کو ملحوظ ما کے مکمل کیا جاتا ہے۔ میرٹھا دوہرے تکملے (۵) اور (۶) باہم مساوی ہیں کیونکہ وہ ایک ہی حجم کو تعبیر کرتے ہیں۔

جب رقبہ زیر بحث مستطیل (ج) ہے تو (۵) میں ما کے حدود مستقل ہونگے
یعنی $و ج$ و $و ج$ بالترتیب اور (۶) میں لا کے حدود $و ج$ و $و ج$
بھی مستقل ہوں گے یعنی $و ج$ و $و ج$ بالترتیب۔ اس لئے
 $و ج$ و $و ج$ و $و ج$ و $و ج$ کی بجائے بالترتیب
و ج و ج سے

ک ف (لا، ما) فرما = ک ف (لا، ما) فرلا... (۷)
یعنی جب سب حدود مستقل ہوں تو ما اور لا کے حدود وہی ہونگے خواہ شکل کے
اعمال کو کسی ترتیب میں لیا جائے۔ جب حدود سب مستقل نہ ہوں تو (۵) میں ما کے
(یا لا کے) حدود وہی نہیں ہونگے جو مساوی شکلہ (۶) میں ما کے (یا لا کے) حدود ہیں
دوہرے شکلہ کی ہندسی تعبیر نہایت کامد ثابت ہوتی ہے، لیکن اسکے مفہوم کی
توضیح اور طرح سے بھی ہو سکتی ہے، مثلاً ک ف (لا، ما) کو رقبہ ع ف گ ج
پر مادہ کی متغیر سطحی کثافت خیال کیا جاسکتا ہے، اس صورت میں شکلہ سے کل کثیت
مادہ حاصل ہوگی۔

۲۷۔ دوہرے شکلوں کی ترقیم۔ قطبی اجزاء۔ ضابطہ (۵) اور (۶)

کی شکل سے ٹھیک طور پر واضح ہوتا ہے کہ شکلے کس ترتیب سے لئے جائے چاہئیں، لیکن
اور یہ نہیں ہی استعمال ہو سکتی ہیں جو اگرچہ ایسی صریح اور میں نہیں تاہم آسان اور
سہولت دہ ضرور ہیں، مثلاً یہ صورت

ک ف (لا، ما) فرلا فرما... (۸)

کچھ ایسے اضافہ کے ساتھ کہ ”عمل شکل کو کل رقبہ ع ف گ ج پر دست دیا جائے“

(۵) یا (۶) کے معادل کے طور پر استعمال ہو سکتی ہے۔

(۵) کی بجائے ذیل کی علامت اکثر استعمال کی جائے گی

وجہ مفا ک ف (لا، ما) فلا فرما

جس کے متعلق اس دستور کو ملحوظ رکھا جائیگا کہ پہلا تکمیل بلحاظ اس متغیر کے ہوگا جو سب سے بائیں جانب ہے یعنی ما اور اس کے حدود اس علامت پر مرقوم ہونگے جو عین شکل کے پاس ہے یعنی مفا مفا۔ علاوہ اس کے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ رقبہ عفا عفا ایسے جزوی رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو مستطیل نہیں ہیں۔ اگر نمونہ کا ایسا جزوی رقبہ مفا مفا ہو اور اگر مفا مفا کے اندیا اس کے محیط پر کے کسی نقطہ کے محدود (لا، ما) ہوں تو (ا) کے جواب میں مجموعہ

ح ف (لا، ما) مفا مفا (ا)

مرتب ہوگا۔ ہندسی نقطہ نظر سے اگر دیکھا جائے تو (ا) سے دفعہ گذشتہ کے مجسم کا تقریبی حجم حاصل ہوگا۔ رقبوں مفا مفا کی تعداد کے لانا ہمارے چاہنے اور اس کی بنا پر ہر رقبہ مفا مفا کے لانا ہمارے چاہنے سے جو انتہا حاصل ہوگی وہ مجسم مذکور کا حجم ہوگا اس انتہا کو اس طرح تعبیر کیا جائیگا

ک ف (لا، ما) مفا مفا (۹)

جہاں عمل تکمیل کو کل رقبہ عفا عفا پر توسیع دی گئی ہے۔
سلسلہ ۲ دفعہ ۸ حصہ اول کی رد سے یہ دیکھنا آسان ہے کہ جہاں تک مجموعہ (ا) کی انتہا (۹) کا متعلق ہے (لا، ما) مفا مفا کے اندیا محیط پر کوئی نقطہ ہو سکتا ہے اس بات کا یاد رکھنا نہایت ضروری ہے کیونکہ اس میں جو اصول یہاں ہے وہ اکثر استعمال کیا جاتا ہے (مثال کے طور پر دیکھو دفعہ ۲۸ کی مثال ۳)
فرض کرو مفا مفا کا تعین اس طرح ہوتا ہے۔ دو متحدہ دائرے لو جن کے نصف قطر ر اور ر + مفا ر ہوں، ان کے دو نصف قطر کو جو ابتدائی خط کے ساتھ زاوے طہ اور طہ + مفا طہ بنائیں۔ جو دائروں کی قوسوں

اور ان نصف قطروں کے درمیان چھوٹا رقبہ گھرا ہوا ہے اسے ہم مف (س) فرض کر سکتے ہیں، ظاہر ہے کہ اس میں $\frac{1}{2}$ قطب نقطہ کے قطبی عدد ہیں، پس

$$\text{مف (س)} = \frac{1}{2} (\text{ر} + \text{مف (ر)}) \text{مف ط} - \frac{1}{2} \text{ر مف ط}$$

$$= \text{ر مف ر مف ط} + \frac{1}{2} (\text{مف ر}) \text{مف ط}$$

پس صفاریات کے رتبہ اول تک مف (س) = ر مف ر مف ط
اگر ف (لا، ما) میں لا = رجم ط، ما = رجب ط رکھا جائے اور اس کی تبدیل شدہ شکل ف (ر، ط) ہو جائے تو (۹) کی بجائے یا اس کے معادلات (۵)، (۶) کی بجائے لیگا۔

$$\text{ر (ر) ف (ر، ط) ر فر ر فر ط} \dots \dots \dots (۱۰)$$

جہاں عمل مکمل کر کے رقبہ ع ف گ ح پر توسیع دی گئی ہے۔

بمطابق ط کے مکمل کرنے میں ر کو مستقل رکھا جائیگا ط تکمل سے ہندی تعبیر کے مطابق

فجسم کی اسطوانی تراش کا رقبہ لیگا۔ مکملہ (۱۰) کی قیمت معلوم کرنے سے پہلے مخفی

ع ف گ ح کو کھینچ لینا چاہئے اور اس امر کی احتیاط کرنی چاہئے کہ کوئی رقبہ

سوائے ان رقبوں کے جو مخفی سے متعلق ہیں حساب لگانے میں شریک نہ ہو جائے یا مخفی

سے متعلق کوئی رقبہ حساب لگانے میں رہ نہ جائے یہی ہدایت اکثر محکماتی اعمال پر عائد ہوگی۔

طالب علم ان نتائج کی توسیع باسانی تہرے محمولوں

$$\text{ر (ر) ف (لا، ما، ہی) فلا فر ما فر ہی یا ر ف (لا، ما، ہی) فر ح}$$

کی صورت میں کر سکتا ہے جہاں فلا فر ما فر ہی یا فر ح حجم کا ایک جنموں اور

ف (لا، ما، ہی) مثلاً نقطہ (لا، ما، ہی) پر نکات ہے، بمطابق ہی کے مکمل

کرنے سے جبکہ لا، ما کو مستقل رکھا جائے اس ستون کی قیمت حاصل ہوگی جو قاعدہ

فلا فر ما پر گھرا ہے۔ پھر ما تکمل سے جبکہ لا کو مستقل رکھا جائے ایک ایسی قاش کی

قیمت حاصل ہوگی جس کی موندائی فلا ہے اور جو محور لا پر عمود دار ہے اور آخر الامر لا،

مکمل سے حجم کی کل قیمت حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ اس چار سطحی کا حجم معلوم کرو جو محدود کی سطوح مستویہ اور سطح

منفی ع ف گ ج سے گھری ہوئی ہے، 'ا' ب' ج' تینوں مثبت ہیں۔

ج = $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ سے گھری ہوئی ہے، 'ا' ب' ج' تینوں مثبت ہیں۔

$$ف = ب (1 - \frac{1}{3})$$

$$\text{اور مدد سے } ب = (1 - \frac{1}{3})$$

اور دفعہ ۲۶ کا مدد سے ایسا مقرر۔

$$\text{میں سے } ف = ب (1 - \frac{1}{3})$$

$$ج = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3})$$

اس لئے (۵) کو استعمال کرنے سے

حجم حاصل ہوگا

$$ج = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3})$$

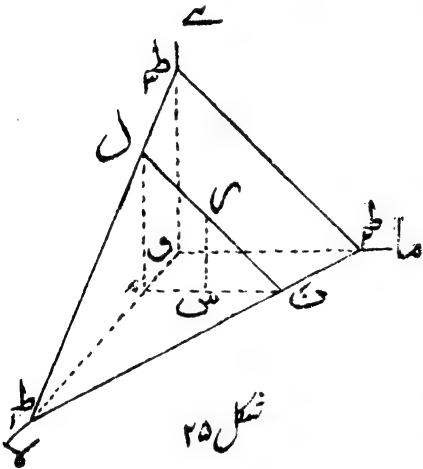
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

میرا $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ مثلاً ل مدد کا رقبہ ہے۔

مثال ۲۔ مکملہ ل لا' فرح کی قیمت معلوم کرو جبکہ اسے ناقص نما

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$ج = (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3})$$



کیونکہ بلحاظ مادہ ہی کے مکمل کرنے میں لا مستقل ہے اور ک کی فرما فرمی اس
تراش کا رقبہ ہے جو محور کا پرعمود وار ہے۔ اب بلحاظ لا کے مکمل کرو، نتیجہ
 $\frac{\pi r^2}{15}$ حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل لا کی اوسط قیمت ناقص نما کے تمام حجم میں

اوپر کی قیمت $\frac{\pi r^2}{15}$ کو حجم پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے یعنی $\frac{r}{5}$ ۔

بالمعوم تفاعل ف (لا ما) کی اوسط قیمت رقبہ ع ف گ (ر شکل ۲۳)
پر نکملہ (۵) یا کول رقبہ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگی اور اسی طرح کی تعریف کل
حجم میں کی اوسط قیمت کے لئے صادق آئے گی۔ اگر اس مثال میں لا نقطہ (لا ما)
پر ناقص نما کی قیمت مادہ کی کثافت ہو تو $\frac{r}{5}$ اس قیمت مادہ کی اوسط کثافت ہوگی۔
مثال ۳۔ فما (لا) صرف لا کا تفاعل ہے اور سما (ما) صرف ما کا اور
 ف (لا ما) ان دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہے دفعہ ۲۶ سے یہ لازم آتا ہے کہ
حاصل ضرب فما (لا) سما (ما) کا نکملہ جبکہ سے شیطیل ک ج د
(ر شکل ۲۴) پر لیا جائے ذیل کے نکملوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا

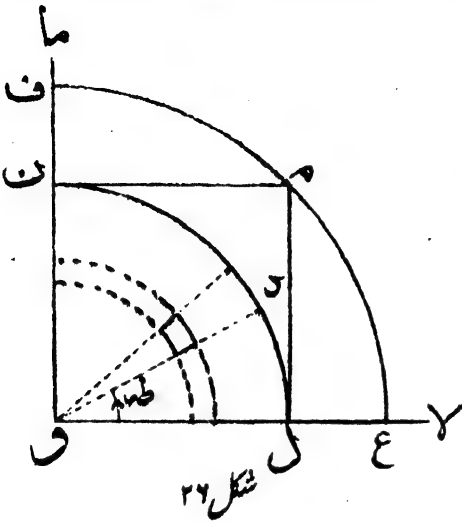
ک فما (لا) فرما اور ک سما (ما) فرما

اب فرض کرو کہ فما (لا) = قو اور سما (ما) = قو ما

اور $\text{ع} = \text{ک}$ قو فرما = ک قو فرما (۱)

ظاہر ہے کہ ان دو نکملوں کا حاصل ضرب ع مساوی ہے ذیل کے نکملہ کے جبکہ اسے
مرج ف لی مرتب پر لیا جائے (ر شکل ۲۶) جس کا ضلع $\text{و لی} = \text{د}$

ک قو سلا (ما) فرلا فرما (۲)



و کو مرکز مان کر دو دائروں
کی قوسیں کھینچو ایک دائرہ کا
نصف قطر $و ل = ل$ ہو
اور دوسرے کا $و ط = ط$
تکملہ (۲) برابر اس تقابل
کے تکملہ سے جبکہ اسے رقبہ
و ل حسن پر لیا جائے
اور چھوٹا ہے اس تقابل کے
تکملہ سے جبکہ اسے رقبہ
و ع حرف پر لیا جائے
یہ دو تکملے قطبی محدودوں میں

تبدیل کرنے سے باسانی حاصل ہو سکتے ہیں، فرلا فرما کی بجائے رفر فرط ہوگا
اور تو - (لا + ما) کی بجائے تو اور (۲) ہو جائیگا رقبہ و ل حسن کے لئے

$$ل ل تو رفر فرط = ل ل تو رمر ل مرط = \frac{\pi}{4} (۱ - تو) \text{ کیونکہ}$$

$$تو ر کا تکملہ - \frac{1}{4} تو ہے$$

جب تکملہ کو رقبہ و ع حرف پر محسوب کیا جائے تو تکملہ کی قیمت $\frac{\pi}{4} (۱ - تو)$ ہوگی۔
عمران دو قیمتوں کے درمیان واقع ہوتا ہے، لیکن جب $ل$ مال بہ لاتناہی
ہو تو دونوں قیمتیں مال بہ $\frac{\pi}{4}$ ہوتی ہیں اور اس صورت میں عمر مال بہ $\frac{\pi}{4}$ اور
ع مال بہ $\frac{1}{4} \pi$ ہوتا ہے۔ پس

$$ل ل تو لا فرلا = ل ل لا فرلا = \frac{\pi}{4} (۱ - تو) = \frac{\pi}{4}$$

یہ مثال ایک شہو تکملہ کی خاص صورت ہے (دیکھو مشق ۹، مثال ۲۱) اور

انہیں تمام مقدار ماہہ میں لیا جائیگا۔
ماہہ کی کچی، سٹھی اور خلی تقسیم میں مسافاتیں (۲) یہ شکلیں اختیار کریں گی۔

$$\frac{\text{کلاک فرح}}{\text{کلاک فرح}} , \frac{\text{کلاک فرس}}{\text{کلاک فرس}} , \frac{\text{کلاک فرس}}{\text{کلاک فرس}} \dots\dots\dots (۳)$$

نسب نامہ صورت میں تمام کمیت مادہ ہے۔
مرکز جمود کی بجائے بعض اوقات مضطحات مرکز کمیت یا مرکز ہندسی استعمال
ہوتی ہیں، کسی حجم یا خط کا مرکز ہندسی یکساں کثافت کی کسی کمیت مادہ کا
مرکز جمود ہے جو اس حجم یا خط کے اندر شامل ہو۔

مثال ۱۔ یکساں کشا فکے دائرہ کی قوس ج ع ج (شکل ۸۰)

از روئے تشاکل مآء

فرض کریں کہ Δ لاہور میں ہے۔

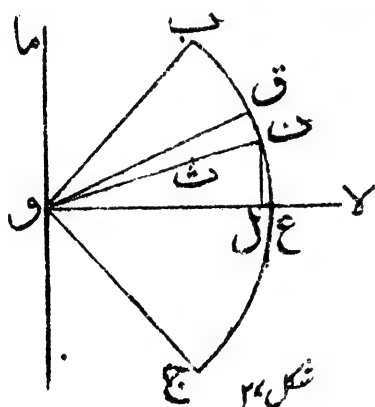
کلی = ۹ = زوج طری

تیس عفت = س = اوسط

فريديريك و فريدي

سچی شرافت کا مستقل ہے

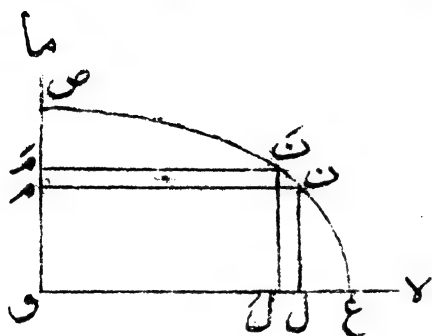
اس نے کہتے ہیں: انا اے۔



نیز کلام فرس = لک ^ع و جم طه و فرطه = الم واجب ^ع

$$\frac{\text{الحجبة}}{\text{حجبة}} = \frac{\text{الحجبة}}{\text{الحجبة}} = \frac{\text{الحجبة}}{\text{حجبة}}$$

مثال ۲۔ یکساں کثافت کا مستوی تپیز جس کی شکل ناقص کے ربع و عرض کی ہے (شکل ۲۸) استعمال کرنے کے بغیر ایسے سوال حل ہو سکتے ہیں۔



شکل دوم

سعیار اثر

$\frac{1}{p} \neq x$ کہ لا فرما یعنی $\frac{1}{p}$ کہ لا فرما ہے۔

کل قیمت ۱۱ روپے ۶۰

اس لئے $\frac{\text{کدوب}}{۴} = \frac{۱}{۴} \times \text{کد کڑ لا زما} = \frac{۱}{۴} \times \text{کد ب کڑ (ب-ما) زما}$
 $= \frac{۱}{۴} \times \text{کد کدوب}$

$$\frac{14}{113} = \overline{0.12389381416}$$

اسی طرح سے $\frac{a}{\pi} =$ حاصل ہوگا اگر $\frac{a}{\pi}$ کو $\frac{1}{\pi}$ کو کہتے

کا ابتدائی خرومانا جائے۔

اگر کثافت کیساں نہ ہو تو اچھے کا طریقہ بالعموم کارگر نہیں ہوتا۔

فرض کرو کہ گما = س لا ما (س مستقل)

کل کمیت ت = $\frac{1}{2}$ س لا مافرا فرما = س $\frac{1}{2}$ لا فرما $\frac{1}{2}$ مافرا

= $\frac{1}{2}$ س $\frac{1}{2}$ لا $\frac{1}{2}$ مافرا

اور چونکہ و م = ماف = ب (۱ - $\frac{1}{2}$) ہمیں باسانی حاصل ہوتا ہے

ت = $\frac{1}{2}$ س و ب

غیر ت لا = $\frac{1}{2}$ س لا مافرا فرما = س $\frac{1}{2}$ لا فرما $\frac{1}{2}$ مافرا

= $\frac{1}{2}$ س و ب

اسلئے لا = $\frac{1}{2}$ و، اسی طرح سے ماف = $\frac{1}{2}$ ب

مثال ۳۔ یکساں کثافت کا قطع دائرہ۔

مثال (۱) کی ترتیم اختیار کرو۔ چھوٹے قطع و ح ق کو کمیت کا جزو مانو

و ح ق کا مرکز جمود نقطہ ($\frac{1}{2}$ و ط) پر ہے اور جزو کا سیما دائرہ و صا کے گرد ہے

$\frac{1}{2}$ و جم ط \times کم $\frac{1}{2}$ و فر ط = $\frac{1}{2}$ کم و جم ط فر ط

کل کمیت ت = کم و جم ط، از رو کے تشاکل ماف = $\frac{1}{2}$ پس

ت لا = $\frac{1}{2}$ کم و جم ط فر ط = $\frac{1}{2}$ کم و جم ط

پس لا = $\frac{1}{2}$ و جم ط

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو بالعموم دوسرے یکساں کی ضرورت ہوگی۔
و ح ق کے مرکز جمود کو و ح پر مانا گیا ہے یہ کئی بار بتایا گیا ہے کہ

انتمہا لینے میں ایک ہی بات ہے خواہ نقطہ ($\frac{1}{2}$ و ط) کو یا ($\frac{1}{2}$ و ط) کو

$\text{م}^1 + \text{م}^2 + \text{م}^3 + \dots + \text{م}^n$
 یا اختصاراً $\text{م}^{\text{ح}}$ کو اس نظام ذرات کے جمود کا معیار اثر یا صرف معیار کہتے ہیں
 محو و ط کے گرو۔
 جب یہ کمیتیں ایک مسلسل جسم کی شکل میں ہوں تو حاصل جمع کی بجائے عمل تکمیل
 کرنا ہو گا جیسا کہ جمود کے مرکوزوں کی صورت میں دیکھا گیا۔
 اگر نظام کی کل کمیت $\text{م}^{\text{ہ}}$ ہو اور ک ایک مقدار اس طرح منتخب کی جائے کہ

$$\text{م}^{\text{ک}} = \text{م}^{\text{ح}} \text{ یا } \text{م}^{\text{ک}} = \text{ک}^{\text{ر}} \text{ م}^{\text{ر}}$$

تو مقدار ک کو نظام کا گردش کا نصف قطر کہتے ہیں محور کے گرد جمود کے معیار اثر کو
 ہم بالعموم صرف ج سے تعبیر کریں گے۔
 جمود کے معیار اثر معلوم کرنا عمل مسائل ذیل کی مدد سے آسان ہو جاتا ہے
 (۱) $\text{و}^{\text{لا}}$ ، $\text{و}^{\text{ما}}$ سے تین قائم محور ہیں، ایک مستوی پتہ سطح
 لا و ما میں واقع ہے اور اس کے جمود کے معیار اثر $\text{و}^{\text{لا}}$ ، $\text{و}^{\text{ما}}$ کے
 کے گرد بالترتیب $\text{ج}^{\text{لا}}$ ، $\text{ج}^{\text{ما}}$ ، $\text{ج}^{\text{ح}}$ ہیں۔ تب

$$\text{ج}^{\text{ح}} = \text{ج}^{\text{لا}} + \text{ج}^{\text{ما}}$$

(۲) کسی محور $\text{و}^{\text{س}}$ کے گرد جمود کا معیار اثر $\text{ج}^{\text{س}}$ ہے، جسم کے مرکز جمود
 ش اس سے گزرنے والے متوازی محور کے گرد معیار اثر $\text{ج}^{\text{ش}}$ ہے اور ان محوروں
 کا باہمی فاصلہ د ہے۔ تب

$$\text{ج}^{\text{س}} = \text{ج}^{\text{ش}} + \text{م}^{\text{د}}$$

جہاں $\text{م}^{\text{د}}$ نظام کی کل کمیت ہے۔
 ان مسائل کے ثبوت نہایت آسان ہیں، یہ طالب علم کے لئے چھوڑ دئے گئے ہیں۔

علم جبل کی کسی کتاب میں مل سکیں گے۔

مثال ۱۔ یکساں کثافت کی ایک پتلی سیدھی سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو سلاخ کے ایک سرے میں سے گزرتا ہے اور اس پر عمود وار ہے۔ فرض کر دو کہ سلاخ پر کے کسی نقطہ کا فاصلہ محور سے Δ ہے، لہٰذا خطی کثافت ہے اور Δ سلاخ کا طول ہے۔ کمیت کا جزو Δ صف Δ فرض کر دو۔ پس

$$\text{جمود کا معیار اثر} = \int \Delta \times \Delta \text{ صف} \Delta = \frac{1}{2} \Delta^2 \text{ صف} \Delta$$

جہاں Δ = Δ سلاخ کی کمیت ہے، پس گردش کا نصف قطر $\Delta = \frac{\Delta}{2}$

اگر گردش کا محور سلاخ کے نقطہ رتصیف میں سے گزرے اور سلاخ پر عمود وار ہو تو اس کے گرد معیار $\frac{\Delta^2}{12}$ ہوگا۔ یہ بلا واسطہ ثابت کیا جاسکتا ہے یا مسئلہ (۲) کو استعمال

کرنے سے۔ مثال ۲۔ یکساں پتھرے کے جمود کا معیار ایک ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کے ایک ضلع کے متوازی ہے۔ فرض کر دو کہ اضلاع کے طول Δ ہیں اور محور ضلع Δ کے متوازی ہے۔ پتھرے کو ایسے باریک ٹکڑوں میں تقسیم کرو جو ضلع Δ کے متوازی ہوں، فرض کر دو کہ ایک ٹکڑے کی کمیت صف Δ ہے اور کل پتھرے کی مر۔

مثال (۱) کی دو سے صف Δ کا معیار محور کے گرد صف $\Delta \times \frac{\Delta^2}{12}$ ہے اسلئے

کل مستطیل کے جمود کا معیار اثر $\frac{\Delta^2}{12}$ مر Δ ہوا۔

اگر گردش کا محور مرکز میں سے گزرے اور ضلع Δ کے متوازی ہو تو اس کے گرد جمود

کا معیار $\frac{\Delta^2}{12}$ ہوگا، اس لئے مسئلہ (۱) کی رو سے جمود کا معیار ایک ایسے محور کے

گرد جو مرکز میں سے گزرے اور پتھرے کی سطح پر عمود وار ہو $\frac{\Delta^2}{12} (\Delta + \Delta)$ ہوگا۔

اوپر کے نتائج کو استعمال کرنے سے ہم ایک یکساں سطحی متوازی السطوح کا معیار ایک ایسے محور کے گرد باسانی معلوم کر سکتے ہیں جو مرکز میں سے گزرے اور ایک کنارے کے متوازی ہو۔ فرض کرو کہ متوازی السطوح کے کنارے Δ ، β ، γ ہیں اور گردش کا محور کنارہ γ کے متوازی ہے۔ مجسمہ کو کمیت مفف M کی پتلی قاشوں میں تقسیم کرو جو کنارہ γ پر عمود وار ہوں۔ ایک قاش کے جمود کا معیار اثر مندرجہ بالا نتیجہ کی رو سے مفف $\Delta + \beta$ ہے، اس لئے مجسمہ کا معیار $M(\Delta + \beta)$ ہے جہاں M مجسمہ کی کمیت ہے۔

مثال ۳۔ یکساں ناقصی پتھر کے جمود کا معیار محور اعظم کے گرد۔
ایسے خطوط کے ذریعہ جو محور اصغر کے متوازی ہوں پتھر کے کو کمیت مفف M کے پتے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔

مثال (۱) کی رو سے اس ٹکڑے کا معیار مفف $M \times \frac{2}{12} \Delta$ یعنی مفف $M \times \frac{2}{3} \Delta$ ہے جہاں Δ ٹکڑے کا معین ہے۔

اگر پتھر کی کثافت k ہو تو مفف $M = k \Delta$ مفف Δ ، اسلئے
 $\gamma = k \frac{1}{3} \Delta$ مفف $M = k \frac{1}{3} \Delta$ مفف $\Delta = k \frac{1}{3} \Delta \times \frac{2}{3} \Delta = k \frac{2}{9} \Delta^2$ (۱) مفف Δ
 لیکن $k \frac{1}{3} \Delta$ مفف $\Delta = k \frac{1}{3} \Delta$ مفف $\Delta = k \frac{1}{3} \Delta$ مفف $\Delta = k \frac{1}{3} \Delta$ مفف Δ
 رکھنے سے

کل کمیت $M = k \Delta$

اسلئے $\gamma = k \frac{1}{3} \Delta$ مفف $M = k \frac{1}{3} \Delta$ مفف $\Delta = k \frac{1}{3} \Delta$ مفف Δ

محور اصغر کے گرد معیار $M \frac{1}{3} \Delta$ ہے اور مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد جو پتھر کی سطح پر عمود وار ہو معیار $M \frac{1}{3} \Delta$ ہے۔

دائرہ کی صورت میں معیار ایک قطر کے گرد $\frac{1}{2}$ ہوگا [ب کو ا کے مساوی رکھنے سے] اور مرکز سے گزرنے والے محور کے گرد جو پترے کی سطح پر عمود وار ہو معیار $\frac{1}{2}$ ہوگا۔

موجودہ کریمیت دائرہ کو باریک ہم مرکز دائروں میں تقسیم کرنے سے آسانی حاصل ہو سکتی ہے پھر چونکہ تشاکل کی رو سے تمام قطروں کے گرد جمود کے معیار اثر مساوی ہوں گے اسلئے مسئلہ (۱) سے ظاہر ہے کہ کسی قطر کے گرد کا معیار اس محور کے گرد کے معیار کا آدھا ہوگا جو مرکز میں سے گزرتا ہے اور سطح پر عمود وار ہے۔

مثال ۴۔ یکساں ناقص نما کے جمود کا معیار اثر و ع کے گرد۔ مستوی تراشوں سے جو و ع پر عمود وار ہوں ناقص نما کو قطبی تراشوں میں تقسیم کرو۔

ایسی ایک تراش کی کیمیت مفام = π ک ب ج (۱) - $\left(\frac{1}{2}\right)$ مفلا اور گذشتہ مثال کی رو سے مفام کا معیار و ع کے گرد $\frac{1}{2}$ مفام $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ جہاں $\frac{1}{2}$ ب اس تراش کے محور ہیں۔

لیکن $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ب (۱) - $\left(\frac{1}{2}\right)$ ج = $\frac{1}{2}$ ج (۱) - $\left(\frac{1}{2}\right)$ قیبتیں مندرجہ کرنے اور۔ اسے ایک تکمیل کرنے سے جمود کا معیار اثر

$$= \frac{1}{2} \pi \text{ ک ب ج (ب+ج) } \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) \right) \text{ فرلا} \\ = \frac{\pi \text{ ب+ج}}{2} \text{ جہاں م} = \frac{\pi \text{ ک ب ج}}{2}$$

= ناقص نما کی کیمیت
دوسرے محوروں کے گرد کے معیار اثر روئے تشاکل حاصل ہو سکتے ہیں۔
۳۰۔ حجم کا قطبی جزو۔ قطبی مثالوں میں کسی نقطہ کے گردی قطبی عددوں

ر، ط، ف، ذ (دفعہ ۸۹ حصہ اول) کی رقوم میں حجم کا جزو مف ح مطلوب ہوتا ہے۔

نقطہ ح اور محور سے ہیں سے جو سطح مستوی گذرتی ہے اسے عدا سے تعبیر کرو۔ سب سے پہلے ر اور ف، ذ کو مستقل رکھو اور فرض کرو کہ ط، ہوا جاتا ہے ط، + مف ط، اس طرح ح، ایک دائرہ کی قوس ح، ق، سطح عدا میں منقسم کرتا ہے اور ح، ق، = ر، مف ط، اس کے بعد فرض کرو کہ عدا د ر، ط، مستقل رہتے ہیں اور سطح عدا، وے کے گرد بطور محور کے چھوٹے زاویہ مف ف، میں گھومتی ہے۔ ح، ایک قوس ح، ق، = ر، جب ط، مف ف، منقسم کر دیا اور اگر

مف ط، مستقل رہے تو قوس ح، ق، کے گھومنے سے ایک رقبہ مف س پیدا ہوگا جو تقریباً قوس ح، ق، \times قوس ح، یعنی ر، جب ط، مف ط، مف ف، ذ کے مساوی ہوگا۔ اس کے علاوہ ط، ف، ذ، مف ط، مف ف، ذ کو مستقل رکھو اور فرض کرو کہ ر، بدل کر ر، مف ر، ہو جاتا ہے۔ رقبہ مف س حجم کا ایک جزو مف ح پیدا کرے گا جو تقریباً مف س \times مف ف، ذ یعنی ر، جب ط، مف ر، مف ط، مف ف، ذ کے مساوی ہوگا۔

مف ح کی انتہا حجم کا قطبی جزو ہے، پس
فرح = ر، جب ط، فر ف، ذ
ایک کرہ کا نصف قطر ہے، اسکی سطح کا جزو

فرس = ر، جب ط، فر ط، فر ف، ذ
فرض کرو کہ ر، ف، (ط،) ایک منحنی کی قطبی مسافت ہے جو سطح مستوی سے ولا میں واقع ہے اور وے خط ابتدائی ہے، فرح کو ف، ذ = سے ف، ذ = $\frac{1}{2}$ تک اور پھر ر، ذ = ر، ف، (ط،) تک مکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ تدریجی یا گردشیں سطح کے حجم کا قطبی جزو $\frac{1}{2}$ ر، جب ط، فر ط، ہے جہاں اس میں ر، سے مراد ف، (ط،) ہے۔

فرض کرو کہ سطح پر کوئی نقطہ $(\text{لا}، \text{ما}، \text{اھی})$ ہے اور ایک مستطیلی متوازی السطوح جو تا حدہ مف لا مف ما پر کھڑا کیا جائے وہ سطح سے رقبہ کا جزو مف لسه کاٹتا ہے اور خا پر کی ماسی سطح سے مف لسه - اگر خا پر کی ماسی سطح پر کا عماد و سے کے ساتھ زاویہ گما بنائے تو

$$\text{مف لسه} = \text{مف لسه} = \text{مف لا مف} = \text{مف لا مف} = \text{مف لا مف}$$

اگر مف لسه کی انتہا ہم ایک مان لیں تو

$$\text{مف لسه} = \text{مف لا} = \text{مف لا}$$

عماد کی سمتی جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں جبکہ سطح کی مسادات معلوم ہو (دفعہ ۹۱ حصہ اول) اس طرح سے فرضہ متغیرات $\text{لا}، \text{ما}، \text{اھی}$ جف لا ، جف ما کی رقوم

میں بیان ہو سکتا ہے -
تعریفات - مصطلحات، خطی تکملہ اور سطحی تکملہ کثیر الاستعمال ہیں، انکی تعریف کر دینا مناسب ہوگا اگرچہ انکی خالصتوں اور تعلقات کی بحث کے لئے اس جگہ گنجائش نہیں فرض کرو کہ ص ایک ایسی مقدار ہے جو سمت اور مقدار دونوں رکھتی ہے جیسے رفا یا قوت - اور ایک منحنی $(\text{ان}، \text{ق})$ کے کسی نقطہ ن پر ص کی سمت اور ن پر کے ماس کی سمت میں زاویہ صہ بنتا ہے - اگر اس اس قوس کا طول ہو جو منحنی پر کے ایک ثابت نقطہ اور ن کے درمیان ہے تو تکملہ

ص کو ہم ص کا خطی تکملہ منحنی $\text{ان}، \text{ق}$ کے ساتھ ساتھ کہنے جگہ تکملہ کو س کی اس قیمت سے جو $(\text{ا}$ پر ہے ب تک کی قیمت تک لیا جائے - مثلاً دفعہ ۹۵ حصہ اول میں کام کہ قوت ق کا خطی تکملہ ہے منحنی $(\text{ان}، \text{ق})$ کے ساتھ ساتھ - اگر سمتی ص کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی $\text{لا}، \text{ما}، \text{اھی}$ ہوں تو تکملہ (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں [دفعہ ۹۵ (۳) حصہ اول]

(۲) لا فرس + ما فرس + ے فرس (فرس) فرس (۲)

نیز فرض کرو کہ صف میں سطح کا ایک جزو ہے، اس جزو صف میں
پر ایک نقطہ ہے اور سطح کے نقطہ اس پر کے عماد اور ص کی سمت کے دیکھا
زاویہ صہ بنتا ہے ماب

تکملہ (۳) ص جم صہ فرس (۳)
کو جب سطح کے کسی حصہ پر لیا جائے تو ہم اس کو ص کا سطحی تکملہ اس حصہ پر کہیں گے۔
مثلاً اگر اس پر برقی حدت ص ہو تو حدت کا عمادی جزو ترکیبی
ع = ص جم صہ اور تکملہ (۳) سے عمادی برقی حدت کا سطحی تکملہ مراد
ہوگا سطح کے مذکورہ حصہ پر۔

مشق ۹

۱۔ ما کی اوسط قیمت سعت ۰ تا ۱۱ میں معلوم کرو جبکہ

(۱) ما = لا جب لا + لا جب ۲ لا + + لا جب ۱ لا

(۲) ما = با جب لا + با جب ۲ لا + + با جب ۱ لا

۲۔ اگر ما = لا جب لا + با جب لا + لا جب ۲ لا + با جب ۲ لا

اور می = لا جب لا + با جب لا + لا جب ۲ لا + با جب ۲ لا

تو حاصل ضرب ما می کی اوسط قیمت سعت ۰ تا ۱۱ کے اندر معلوم کرو۔

۳۔ ایک ذرہ حالت سکون سے آزادانہ گرتا ہے، ثابت کرو کہ اسکی اوسط رفتار
بلحاظ وقت کے آخری رفتار کی نصف ہے اور اسکی اوسط رفتار بلحاظ قاصلہ کے
آخری رفتار کی دو تہائی ہے۔

۴۔ کیت م کا ایک ذرہ اپنی حرکت سے سادہ موسیقی حرکت پیدا کرتا ہے جبکہ

(۱) اگر ایک مستوی منحنی کی قوس ایک محور کے گرد گردش کرے جو اس کی سطح میں واقع ہو لیکن اسے قطع نہ کرے تو اسکے گھومنے سے جو سطح پیدا ہوگی اس کا رقبہ = قوس کا طول \times اسکے مرکز ہندسی کے طریق کا طول۔

(۲) ایک مستوی رقبہ ایک ایسے محور کے گرد گھومتا ہے جو اس کی سطح میں واقع ہے لیکن اسے قطع نہیں کرتا۔ ثابت کرو کہ رقبہ کے گھومنے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ = یہ رقبہ \times رقبہ کے ہندسی مرکز کے طریق کا طول۔

محور گردش کو محور کا مانو۔ مذکورہ بالا مسائل ۲۲ کے ساتھ ضرب دینے سے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہونگے

ما^۲ فرس = ک ما فرس، ما^۲ ک فرس = ک ما فرس، $\frac{1}{2}$ ک ما^۲ فرس = $\frac{1}{2}$ ک ما^۲ فرس
آخری تکرار میں ما^۲ ان نقطوں کے معین ہیں جہاں ایک خط مستقیم جو محور کا پیرامیٹر ہے منحنی کو قطع کرتا ہے۔

(۲) سے گردش کی سطح (دفعہ ۲۰) کی صورت میں حجم کے قطبی جزو کے لئے ضابطہ حاصل کرو۔

۱۰۔ ذیل کی صورتوں میں جمود کے معیار معلوم کرو۔ شناخت کیساں ہے۔

(۱) کمیت ہر کے ایک گولی پتھرے کا معیار اس کے راس کے گرد پتھرے کا نصف قطر ہے۔

(۲) کمیت ہر کے ایک کرہ کا معیار ماسی خط کے گرد کرہ کا نصف قطر ہے۔

(۳) کمیت ہر کے ایک مثلثی پتھرے کا معیار قاعدہ کے گرد پتھرے کا ارتفاع

ف ہے۔

(۴) ایک قائم مخروط کی کمیت ہر ہے، ارتفاع ف اور قاعدہ کا نصف قطر۔

اس کا معیار معلوم کرو (۱) اسکے محور کے گرد (۲) راس میں سے گزرنیوالے ایک ایسے محور کے گرد جو قاعدہ کے متوازی ہے۔

۱۱۔ ایک مستطیل (ج) کا ایک ایسے محور کے گرد گردش کرتا ہے جو اس کی سطح میں (ج) کے متوازی ہے لیکن مستطیل کو قطع نہیں کرتا، اگر

(ج) جی کے فاصلے محور سے ۱، ب ہوں تو ثابت کرو کہ مجسم کی گردش کا نصف قطر کا $\frac{1}{2} = (1 + \frac{1}{2}b)$

۱۲۔ لنگر چلے (شقی، مثال ۵) کے محور کا معیار اثر محور کے گرد
م (ج + $\frac{1}{2}b$) ہے اگر جسم کی کثافت یکساں فرض کی جائے۔

۱۳۔ اگر $r = لا + ما + می$ نو ثابت کرو کہ r کی اوسط قیمت ناقص نما

$$\frac{لا}{r} + \frac{ما}{r} + \frac{می}{r} = 1 \text{ کے حجم میں } \frac{لا + ما + می}{5} \text{ ہے۔}$$

۱۴۔ اس فائدہ کا حجم جو اسطوانہ $لا + ما = r$ لا اور مستوی سطح
می = لا مس عدا اور می = لا مس بدا کے درمیان گھرا ہوا ہے
" (مس بدا - مس عدا) ہے۔

۱۵۔ اگر $n < \infty$ تو مکملہ m^{∞} لا n - افر لا کی ایک معین قیمت ہے۔
یہ مکملہ n کا تفاعل ہے جسے بالعموم n کا تفاعل کہتے ہیں، اسے ہم n جاکا (ن)
سے تعبیر کرتے ہیں۔
مکملہ بالخصوص سے ثابت کرو کہ

$$جا (ن) = (ن - ۱) جا (ن - ۱) \dots (۱) \dots (۱)$$

اور میں صورت میں n صحیح عدد ہو تو جا (ن) = (ن - ۱) جا (ن - ۱) = ۱
اگر n صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ n سے عین چھوٹا صحیح عدد d ہے، یعنی
(ن - ۱) (د) کسر واجب ہے۔ تب (۱) سے ظاہر ہے کہ

$$جا (ن) = (ن - ۱) (۱) \dots (ن - ۲) (۲) \dots (ن - د) (د) جا (ن - د) \dots (۲) \dots (۱)$$

۱۶۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) جا (1/p) = \pi$$

$$(۲) جا (1/p + m) = (1/p + m) \times \frac{1 - m^2}{2} \times \frac{1 - m^4}{2} \times \dots \times \frac{1 - m^{2n}}{2} \dots [مصحح عدد]$$

دفعہ ۲، مثال ۳ میں لا = مایہ رکھنے سے مساوات (۱) حاصل ہوتی ہے

$$\frac{م}{۱} = \frac{م}{۱} \text{ کو لا فرلا} = \frac{۱}{۱} \text{ م کو مایہ} = \frac{۱}{۱} \text{ مایہ} = \frac{۱}{۱} \text{ جاک (۱)}$$

پھر مساوات (۲) حاصل ہوتی ہے مثال ۱۵ (۲) مندرجہ بالا سے۔

$$۱۷ - \text{مثبت کرکہ م کو لا لا} = \frac{۱}{۱} \text{ فرلا} = \frac{۱}{۱} \text{ جاک (ن)} \text{ [لا شبت]}$$

۱۸ - مندرجہ ذیل ابدال استعمال کرنے سے جاک (ن) کے لئے اور ضابطے ثابت کرکہ

$$\text{لا} = \frac{۱}{۱} \text{ جاک (ن)} = \frac{۱}{۱} \text{ م کو لا} = \frac{۱}{۱} \text{ فرلا} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{کو لا} = \frac{۱}{۱} \text{ مایہ جاک (ن)} = \frac{۱}{۱} \text{ (لوک مایہ) کو لا} = \frac{۱}{۱} \text{ مایہ} \dots \dots \dots (۲)$$

۱۹ - جب م اور ن دونوں مثبت ہوں تو تکملہ

$$\frac{م}{۱} \text{ لا} = \frac{۱}{۱} \text{ (لا) فرلا}$$

کی ایک معین قیمت ہے، یہ قیمت م اور ن کا تعامل ہوگی، اسے بیضا تعامل کہتے ہیں، ہم اسے با (م، ن) سے تعبیر کریں گے

۲۰ - مندرجہ ذیل ابدال استعمال کرنے سے با (م، ن) کے لئے اور ضابطے حاصل کرکہ

$$\text{لا} = \frac{۱}{۱} \text{ جم طبا، با (م، ن)} = \frac{۱}{۱} \text{ جم طبا جب طبا فرطبا} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{لا} = \frac{۱}{۱} \text{ با (م، ن)} = \frac{۱}{۱} \text{ م کو لا} = \frac{۱}{۱} \text{ فرلا} \dots \dots \dots (۲)$$

۲۱ - مثال ۱۸ کی شکل (۱) کو استعمال کرنے سے لکھو

فدا کے لئے محدود تا π ہیں اور طما کے تا π ۔ بلحاظ فدا کے مکمل کرنے میں دوسرا متعین طما اور اس لئے اس صورت میں $\frac{1}{2} \pi$ یعنی $\frac{1}{2} \pi$ (جو طما کا تفاعل ہے اور فدا کا نہیں ہے) مستقل رکھا جائیگا۔ اس لئے

$\frac{1}{2} = \text{که}$ و $\frac{1}{2}$ "جب طوطا" $\frac{1}{2}$ "زفره" $= \frac{1}{2}$ که و $\frac{1}{2}$ "جب طوطا" $\frac{1}{2}$

اب متغیر کو طما سے m میں بدلو، اس طرح حاصل ہوگا m فرس = لوج جب طما ۔
 جب طما = $\pm (1 - j)$ m ایک مثبت عدد ہے، پس اگر
 m کے باہر ہو تو $j = 1$ اور اگر m کے اندر ہو تو $j = 0$ ۔
 اگر طما = π تو $m = 1 + j$ دونوں صورتوں میں۔

اسے $\omega = \pi_2 \text{ کرا } \left[\frac{\pi_2}{\omega} \right] = \frac{\pi_2}{\omega} \text{ (ع کر کے باہر) } \dots (1)$

۴۴۵ (ع کوہ کے اندر)..... (۲)

پس $و = م - ج$ جبکہ $ع$ کرہ کے باہر ہو لیکن $ق = \frac{م}{د}$ مستقل
جبکہ $ع$ کرہ کے اندر ہو۔

۲۴۔ دی سوال جو مثال ۲۳ میں ہے مجسم کر کے لئے [کثافت کی مستقل]
 نصف قطر اور ۱۔۴ فرس کی گری سطحوں کے درمیان جو خول ہے اسکو کھیت
 کا جزو قرار دو۔ مثال ۲۳ کے کہ کی بجائے ۱ فرس اور ۱ کی بجائے ۱۴ کے
 اس کے نتائج کو استعمال کرو۔

اگر ع باہر واقع ہو تو نتیجہ (۱۱) سے حاصل ہوگا

$$\frac{m \pi k}{j} = \frac{m \pi k}{j} - \frac{m \pi k}{j} + \frac{m \pi k}{j} = \frac{m \pi k}{j} - \frac{m \pi k}{j} + \frac{m \pi k}{j} \dots (3)$$

اگر عہدہ ختم ہو تو وہ دھڑوں پر منتقل ہوگا اور وہ۔

قوہ و نصف قطر ج کے کوہ کی وجہ سے پیدا ہوگا اور اوپر کے نتیجہ کی مدد سے

$$و = \frac{\pi \pi \kappa}{3} \times \frac{\text{ج}^2}{\text{ج}} = \frac{\pi \pi \kappa}{3} \text{ ج}^2$$

قوہ و اس غول کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے جس کے نصف قطر ج اور را ہیں۔
مثال ۲۳ کے نتیجہ (۲) کی رو سے

$$و = \int \pi \pi \kappa \text{ رفر} = \pi \pi \kappa (\text{را} - \text{ج}^2)$$

اسیے و = و + و = و = $\pi \pi \kappa (\text{را} - \frac{1}{3} \text{ج}^2)$ (۴)
جب راج = را تو (۳) اور (۴) سے جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ایک ہی ہیں۔

— () —

باب چہارم

انحنا لفاف

۳۱۔ انحنا۔ فرض کرو کہ ایک مستوی منحنی پر نقطہ ن اور ق ہیں اور ن اور ق پر کے ماس محور کے ساتھ دائرے فنا، فنا + صف فنا بناتے ہیں اور منحنی پر کے کسی ثابت نقطہ سے ن تک کی قوس کا طول س ہے اور قوس ن ق، صف س ہے، ن اور ق پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ صف فنا ہوگا (شکل ۲۹، صفحہ ۱۴۱)

تعریفات (۱) زاویہ صف فنا قوس ن ق کا کل انحنا کہلاتا ہے۔
(۲) $\frac{\text{صف فنا}}{\text{صف س}}$ کو قوس ن ق کا اوسط انحنا کہتے ہیں۔

(۳) $\frac{\text{صف فنا}}{\text{صف س}}$ کی انتہا $\frac{\text{فر فنا}}{\text{فر س}}$ کو جبکہ ق انتہائی صورت میں ن کے لانا انتہا قریب آجائے منحنی کا انحنا نقطہ ن پر کہتے ہیں۔

ایک دائرہ کے لئے جس کا نصف قطر س ہو صف س = مر صف فنا

$$\text{اسلئے } \frac{\text{صف فنا}}{\text{صف س}} = \frac{1}{r}, \frac{\text{فر فنا}}{\text{فر س}} = \frac{1}{r} \dots \dots (۱)$$

یعنی دائرہ کی کسی قوس کا اوسط انحنا دائرہ کے کسی نقطہ پر کے انحنا کے مساوی ہوتا ہے، دوسرے الفاظ میں دائرہ ایک ایسا منحنی ہے جس کا انحنا مستقل ہے اور اس کا انحنا اسکے نصف قطر کے شکافی کے مساوی ہے۔

انحنا ایک ایسی مقدار ہے جس کا بعد طول کے لحاظ سے ۱ ہے۔

انحصار کسی نقطہ کے معین کے پہلے اور دوسرے مشتقوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے اور وہ اس طرح

$$\text{مس} \text{ فہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} ، \text{جم} \text{ فہ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

پہلی مساوات کو بلحاظ اس کے تفیق کرنے سے

$$\frac{\text{فرمس} \text{ فہ}}{\text{فر فہ}} \times \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرلا}} - \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

$$\text{یعنی قطا فہ} = \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \div \text{قطا فہ}$$

$$\text{اسلئے} \quad \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \div \text{قطا فہ} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{اب چونکہ قطا فہ} = 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) \text{ اسلئے}$$

$$\frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \div \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) \right\} \dots\dots\dots (۱)$$

(۱) کو اساسی ضابطہ تصور کیا جائے۔

یہ نتیجہ صریح جس صورت میں ڈھال $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ استدر چھوٹا ہو کہ سمت زیر

بحث میں کامیاب نظر نہ آئے ہو سکے تو انحصار تقریباً $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ ہوگا علم حیل میں خاصکر

شہتیروں کے جھکنے کے نظریہ میں یہ تقریبی قیمت اکثر استعمال ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ مکانی $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰}$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۱۰} ، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۱۰} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\text{فرقہ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \left\{ \frac{y_2}{x_2} + 1 \right\} \div \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

اگر کث (لا، ما) پر کا عماد محور سے گ پر لے تو

$$ن گ = \frac{y_2}{x_2} + 1 = \frac{y_2}{x_2} + \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2 x_1 + y_1 x_2}{x_2 x_1}$$

منفی علامت کے مضموم کی طرف دفعہ ۳۲ میں تو جب کی جائیگی۔

$$\text{شال ۲۔ ناقص} = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = 1$$

$$\text{فرما} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{y_2 x_1}{x_1 x_2} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1 x_2}$$

کیونکہ ناقص کی مساوات سے $y_1 x_2 + y_2 x_1 = x_1 x_2$ اور

$$\text{اس لئے فرقہ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 x_2}$$

اگر مرکز سے نقطہ (لا، ما) پر کے ماس پر عمود کھینچا جائے اور اس کا طول ع ہو تو

$$ع = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 x_2}$$

اگر کث گ نقطہ کث (لا، ما) پر کا عماد ہو تو

$$\text{کث گ} = \frac{y_2}{x_2} + 1 = \frac{y_2}{x_2} + \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2 x_1 + y_1 x_2}{x_2 x_1}$$

اسی طرح کا نتیجہ نائڈ کے لئے درست ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی مخروطی تراش کا انحناء عماد کے مگب کے بالعکس بدلتا ہے۔

۳۲۔ دائرہ انحناء، نصف قطر، مرکز دائرہ انحناء۔

فرض کرو کہ کث امد ق پر کے عماد نقطہ ح پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (ر شکل ۲۹) جب ق انتہائی صورت میں کث پر آئیگا تو عمادوں کا نقطہ

نصف قطر انخا کہلاتا ہے اور اس کا مرکز ح کن پر کے دائرہ انخا کا مرکز کہلاتا ہے اگر ح کن میں سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ کو دوبارہ خط پر لے تو ح کن کو انخا کا وتر کہتے ہیں۔

اگر ح کن کے محدد (لا، فا) ہوں، ح کے (خا، عا) اور انخا کے نصف قطر

ح کن یعنی فرس کو س سے تعبیر کیا جائے تو یہ باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

خا = لا۔ س جب فہ، عا = ما + س جم فہ (۱)
ہم نصف قطر انخا کو باعموم س سے تعبیر کریں گے اس طرح انخا س سے تعبیر ہوگا۔

اگر فرما نقطہ ح کن پر صفر ہو تو (د) کی رو سے س یا ف ح لا متناہی ہو گا پس

معلوم ہوگا کہ منحنی کے نقطہ انعطاف پر س لا متناہی ہوتا ہے۔

نکسل ۲۹ کو ہم معیاری تصویر بنائیں گے، اگر اس قرار داد کو ہم تسلیم کر لیں کہ فہ ہمیشہ مادہ ہوگا

(دفعہ ۲ حصہ اول) تو فرس اور نقطہ فہ ہمیشہ مثبت ہونگے اور (د) میں جذر کی علامت

مثبت ہوگی۔ اس لئے س اور س دونوں مثبت ہونگے اگر فرما مثبت ہو اور دونوں

منفی ہونگے اگر فرما منفی ہو یعنی س اور س مثبت ہونگے اگر ن کے نزدیک

منحنی اوپر کی طرف منفر ہوا اور منحنی ہونگے اگر منحنی اوپر کی طرف محدب ہو یا اوپر اور او

سے کام لیا جاسکتا ہے لیکن اگر شکل بنائی جائے تو ذرا سی احتیاط سے علامت کا سوال

طے ہو سیکے گا۔ لیکن اکثر اوقات عددی قیمت ہی ضروری اور مطلوب ہوتی ہے۔

نقطہ ح کے انتہائی مقام ح کو بعض اوقات متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع

کہتے ہیں، لیکن کوئی ایک عماد نہیں ہے جو کسی ایک عماد کا متصل ہو لہذا اس

طرز بیان میں بہ نسبت اُسکے جو اس دفعہ کے شروع میں وجہ ہوا مختصراً ہے اس لئے

بعض اوقات اسے استعمال کرتے ہیں۔

یہ قابل توجہ ہے کہ جب توسس حنا ق رتبہ اول کا صفاریہ ہو تو حنا ح
اور ق ح کا فرق اصل رتبہ کا صفاریہ ہوگا کیونکہ ق ح - ح ح کی انتہا
مف ص

صفریہ اور وہ اسلئے کہ ق ح ح ح - ق ح ح (ا - جم مف ص) - حنا ق جم ق ح ح

۳۳۔ انحنا کے لئے اور ضابطے - ضابطہ (د) اتنا سہولت

ثابت نہیں ہوتا جب تک کہ منحنی کی مساوات اس شکل $ما = ف (لا)$ میں نہ دی ہوئی
ہو یا مشتقوں کی قیمتیں آسانی نہ محسوب ہو سکیں جیسا کہ دفعہ ۳۱ کی مثالوں میں اسلئے
ہم ایک دو ضابطے اس جگہ اور محال کہ $ما$ واضح ہو کہ سر کی علامت خاص توجہ
کے قابل ہوتی ہے۔

(۱) $لا = ف (د) = ما = ف (ارت)$ کی شکل کی مساوات۔

ہم $لا$ کے مشتقوں کو اختصار کی خاطر زبروں سے تعبیر کریں گے

(د) میں $حفا$ ، $حفا$ ، $ما$ کی قیمتیں $لا$ ، $لا$ ، $ما$ کی رقوم میں
بیان کرو۔ یہ قیمتیں دفعہ ۹ حصہ اول میں معلوم کی گئی ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوتا

$$\frac{1}{r} = (لا - ما - مالا) / (لا + ما) \quad ؟ \dots \dots (ب)$$

اب چونکہ $حفا$ ، $ما = (لا - ما - مالا)$ اس لئے ہم سر کی علامت

حسب ضرورت دفعہ ۳۳ کی قرار داد کے موافق معزوم کر سکتے ہیں۔

(۲) قطبی مساواتیں - (د) میں $حفا$ ، $ما$ ، $حفا$ ، $ما$ کی قیمتیں $حفا$ ، $حفا$ ،
کی رقوم میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{r} = \{ (لا + ما - مالا) - (لا - ما - مالا) \} \div \{ (لا + ما - مالا) + (لا - ما - مالا) \} \dots \dots (ج)$$

$$\frac{\text{فرع}}{\text{فرع}} = \text{جب سما} + \text{رجم سما} \frac{\text{فرسا}}{\text{فر}} = \frac{\text{ردطما}}{\text{فرس}} + \frac{\text{ردرسا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{ردرف}}{\text{فرس}}$$

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرج}}{\text{فرج}}$$

اشکال کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جب منفی مبدأ کی طرف متغیر ہو (مثلاً کہ قطع ناقص کی صورت میں جبکہ مرکز مبدأ ہو) تو ع اور ر ایک ساتھ بڑھتے اور گھٹتے ہیں

اس لئے $\frac{\text{فرج}}{\text{فرج}}$ اور $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$ دونوں مثبت ہوتے ہیں۔ جب منفی مبدأ

کی جانب محذب ہو تو $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$ منفی ہوتا ہے۔
اب ہم (ج) کو (د) سے حاصل کر سکتے ہیں کیونکہ (دفعہ ۸۸ حصہ اول سے)

$$\frac{\text{مس سما}}{\text{فر}} = \frac{\text{ردطما}}{\text{فر}}$$

$$\text{اور } \frac{۱}{ع} = \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} + \left(\frac{۱}{ر} - \frac{۱}{رطما} \right) \dots \dots (۱)$$

اور بلحاظ ر کے تفریق کرنے سے ہم $\frac{\text{فرع}}{\text{فرع}}$ معلوم کر سکتے ہیں۔

اب ہم اس سے ذرا مختلف ضابطہ حاصل کرینگے جو علم حرکت میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ رکھو $\frac{۱}{ع} = \frac{۱}{ر}$ ، اس طرح $\frac{۱}{ع}$ اور $\frac{۱}{رطما}$ کی رقوم میں حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{فرطما}}{\text{فرطما}} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرع}} - \frac{۱}{ع} - \frac{۱}{رطما}$$

اس طرح مساوات (۱) ہو جائیگی

$$\frac{۱}{ع} = \frac{۱}{ر} + \left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرطما}} \right) \dots \dots (۲)$$

اب بلحاظ ع کے تفریق کرنے سے

مثال ۱۔ لا^۱ + ما^۲ = و^۳

فرض کرو کہ لا = وجم^۱ ت، ما = وحب^۲ ت، ضابطہ (ب) استعمال کرو
 لا^۱ = ۳ وجم^۱ ت حب^۲ ت، لا^۱ = ۳ وجم^۱ ت (۲ حب^۲ ت - جم^۱ ت)
 ما^۲ = ۳ وحب^۲ ت جم^۱ ت، ما^۲ = ۳ وحب^۲ ت (۲ جم^۱ ت - حب^۲ ت)
 لا^۱ + ما^۲ = ۹ وحب^۲ ت جم^۱ ت، لا^۱ + ما^۲ = ۹ وحب^۲ ت جم^۱ ت
 س = ۳ - ۳ وحب^۲ ت جم^۱ ت = ۳ (۱ لا^۱ ما^۲)

اس صورت میں عفا^۱ ما^۲ = $\frac{۱}{۳ \text{ وحب}^۲ \text{ ت جم}^۱ \text{ ت}}$ اور س اگر دفعہ ۳۲ کے
 دستور کے موافق لیا جائے تو یہ ۳ وحب^۲ ت جم^۱ ت ہوگا۔

مثال ۲۔ ز^۱ = وجم^۱ م طہ

اس منہی کی ع، رسادات مرتب کرو اور ضابطہ (د) استعمال کرو۔

س سا^۱ = $\frac{۱}{۳ \text{ وجم}^۱ \text{ م طہ}}$ = ۳ م م طہ = ۳ (م طہ + $\frac{۱}{۳}$)

ہم لینگے سا^۱ = ۳ م طہ + $\frac{۱}{۳}$ ، اس طرح

ع = رجب سا^۱ = رجم م طہ = $\frac{۱+۳}{۳}$

اس لئے س = $\frac{۱}{۳ \text{ وجم}^۱ \text{ م طہ}}$ = $\frac{۱}{۳ (۱+۳)}$

م کو مختلف قیمتیں دینے سے ہمیں کئی مشہور مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

ملاحظہ ہو مشق ۱۰ سوال (۱۰)

مثال ۳۔ قطع ناقص کے انحصار کا مرکز اور اس مرکز کا طریق معلوم کرو۔

ترجمہ دفعہ ۳۲ مثال ۲ کے موافق یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\text{جب فہ} = \frac{\text{ع لا}}{\text{و}} ، \text{جم فہ} = \frac{\text{ع ما}}{\text{ب}} ، \text{س} = \frac{\text{و ب}}{\text{ع}}$$

$$\text{ضما} = \text{لا} - \text{س} \text{ جب فہ} = \text{لا} (1 - \frac{\text{ب}}{\text{ع}}) ، \text{ع} = \text{ما} (1 - \frac{\text{و}}{\text{ع}})$$

اگر ع (لا، ما) کا خارج مرکز زاویہ طہ ہو تو یہ قیمتیں ہو جائیں گی

$$\text{وضما} = (\text{و} - \text{ب}) \text{ جم طہ} ، \text{ب ع} = (\text{و} - \text{ب}) \text{ جب طہ}$$

مرکز انخا کا طریق معلوم کرنے کے لئے طہ کو ساٹھ کرو

$$(\text{وضما})^{\frac{1}{6}} + (\text{ب ع})^{\frac{1}{6}} = (\text{و} - \text{ب})^{\frac{1}{6}}$$

اب اگر رواں محدود لا، ما ہوں تو

$$(\text{و لا})^{\frac{1}{6}} + (\text{ب ما})^{\frac{1}{6}} = (\text{و} - \text{ب})^{\frac{1}{6}}$$

اس منحنی کی ترسیم کے لئے ملاحظہ ہو شکل ۳۰ دفعہ ۳۴۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ ایک منحنی کے کسی نقطہ ن پر کا عمودی اسراع $\frac{v^2}{r}$ ہے

جہاں v ماسی رفتار ہے اور $\frac{1}{r}$ نقطہ ن پر منحنی کا انحناء ہے۔

(شکل ۲۹) فرض کرو کہ ق پر ماسی رفتار v + v ہے، ن ح کی سمت میں ن اور ق پر کی رفتاروں کے اجزاء ترکیبی بالترتیب صفر اور $(v + v)$ جب v v فہ ہیں، اس لئے ن پر کا عمادی اسراع ہے

$$\frac{v + v}{\text{مفت}} = \frac{v}{\text{مفت}} = \frac{v}{\text{مفت}} \times \frac{v}{\text{مفت}}$$

$$= \frac{1}{r} \times v$$

اور یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

مشق ۱۰

۱۔ کسی مخروطی کی مساوات اس شکل میں لکھی جاسکتی ہے $\text{ما}^2 = ۲\text{لا} + \text{ب}^2$ جہاں محور لا ماسکی محور ہے اور ۲ وتر خاص کا طول ہے۔ اگر ح پر کا عماد محور لا سے گ پر ملے اور ح گ اور ماسکی فاصلہ ح کے درمیان زاویہ ح بنے تو ثابت کر دو کہ

$$\text{س} = \frac{\text{ح}^2 \text{گ}}{\text{ح}^2} = \frac{\text{ح}^2 \text{گ}}{\text{ح}^2}$$

یہ قابل توجہ ہے کہ ح کا ظل س ح پر نیم وتر خاص کے مساوی ہے۔
۲۔ مثال میں جو س کی قیمت ح کی رقوم میں معلوم کی گئی ہے اس سے کسی مخروطی تراش کے مرکز انحصار معلوم کرنے کا یہ عمل ثابت کر دو۔ ح کو ح پر عمود وار کھینچو اور فرض کرو کہ یہ س سے ح پر ملتا ہے۔ پھر ح کو ح پر عمود وار کھینچو اور اسے اتنا بڑھاؤ کہ ح سے یہ لا پر ملے۔ لا مرکز انحصار ہو گا۔

۳۔ قائم زاویہ کے لئے $\text{لا} = \text{ما}^2 = \text{ج}^2$ ثابت کر دو کہ

$$\text{س} = (\text{لا} + \text{ما}^2) / \text{ج}^2 = \text{ج}^2 / \text{ج}^2$$

۴۔ قطع ناقص کا مرکز ج ہے اور اسکے محیط پر کے ایک نقطہ ح کا خارج المکرکز زاویہ ط ہے۔ ج ق ناقص کا ایک نیم قطر ہے جو ح پر کے ماس کے متوازی ہے۔

ثابت کر دو کہ عدوی لحاظ سے

$$\text{س} = (\text{اوجب}^2 \text{ط} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{ط}) / \text{اوجب}^2 = \frac{\text{ج}^2 \text{ق}}{\text{اوجب}^2}$$

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ق کا خارج المکرکز زاویہ $\text{ط} \pm \frac{\pi}{2}$ ہے۔ ج ح ق کو مرکز نیم قطر کہتے ہیں کیونکہ ہم باسانی دیکھ سکتے ہیں کہ ان میں

کوئی سا قطر دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔
 ۵۔ ناقص کے ایک نقطہ کا مرکز بنی نیم قطر رہے اور اگر مرکز سے سن پر کے
 ماس پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول رع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ا + ب^۱ - ر^۱ = ر^۲ = \frac{ا ب^۱}{ع^۱} ، س = \frac{ا ب^۱}{ع^۲}$$

زائد کے لئے ثابت کرو (متناسبہ ترقیم کے موافق)

$$ر^۲ - ا + ب^۱ = \frac{ا ب^۱}{ع^۱} ، س = \frac{ا ب^۱}{ع^۲}$$

۶۔ منحنی ا و ما = لا کے لئے ثابت کرو کہ س = (ا + ا لا) $\frac{۱}{۳}$ / لا اور

منحنی ا و ما = لا کے لئے س = لا $\frac{۱}{۳}$ (ا + ا لا)

۷۔ ایک منحنی کی مساوی ا و ما = ب لا + ج لا + د لا + ع لا + ح لا + ... + عی ہے
 جہاں عی لا، ما میں ن، د میں درجہ کا متجانس جملہ ہے
 ثابت کرو کہ مبدأ پر جو منحنی پڑا ہے

$$ع ف ما = ع ف^۱ ما = \frac{ا ب^۲}{و} ، س = \frac{ا}{ا ب}$$

۸۔ مبدأ پر منحنی ما = لا + لا + لا - لا + لا + ما کی صورت میں ثابت

کرو کہ نیم قطر انما $\frac{۵۱۵}{۶}$ ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ

$$ما = \frac{ا}{۴} (و^{\frac{۱}{۲}} + و^{\frac{۱}{۲}})$$

کے انما کا نصف قطر $\frac{ما}{و}$ ہے اور یکساں مضبوطی کے زنجیرہ

ما = ج لوک قط (ل/ج) کے لئے م = ج قط (ل/ج)

۱۰۔ دفعہ ۳۳ شمال ۲ میں جو عام نتائج مرتب کئے گئے ہیں ذیل کی خاص صورتوں میں ان کی تصدیق کرو

(۱) اٹیرن کی شکل کا منحنی $r = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طما}$ ، $r = \frac{1}{2} \text{ ع}$ ، $r = \frac{1}{2} \text{ م}$

(۲) قائم زاؤ $r = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طما}$ ، $r = \frac{1}{2} \text{ ع}$ ، $r = \frac{1}{2} \text{ م}$

(۳) مکانی $r = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طما}$ ، $r = \frac{1}{2} \text{ ع}$ ، $r = \frac{1}{2} \text{ م}$

(۴) خط صنوبری $r = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طما}$ ، $r = \frac{1}{2} \text{ ع}$ ، $r = \frac{1}{2} \text{ م}$
مکانی کے لئے م = $\frac{1}{2}$ ، صنوبری کے لئے م = $\frac{1}{2}$ اور $r = \frac{1}{2}$ کی بجائے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ مبدائیں سے گزرنیوالا وتر انحناء $\frac{1}{2} \text{ ع}$ فرسج ہے

منحنی $r = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طما}$ کے لئے یہ وتر $\frac{1}{2} \text{ ع}$ ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی $r = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طما}$ کی صورت میں نیم قطر انحناء رقم $\frac{1}{2} \text{ ع}$ ہے، نیز نیم قطر انحناء کے سامنے مبداء نیم زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۳۔ اگر ایک مخروطی تراش میں ماسکی نیم قطر اور $\frac{1}{2} \text{ ع}$ کے ماس کے درمیان زاویہ بسا ہو اور ماسکی نیم قطر اور عماد کا درمیانی زاویہ $\frac{1}{2} \text{ ع}$ ہو تو ضابطہ (ع) کی مدد سے ثابت کرو کہ

م = جب $\frac{1}{2} \text{ ع}$ = $\frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طما}$ جہاں مخروطی کی مساوات ہے
 $\frac{1}{2} \text{ ع} = \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} \text{ طما}$

اگر ر ر ماسکی فاصلے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ر ر جم عا = ب = ا ل$$

$$اور ک = \frac{ر ر}{ب} = \frac{ر ر}{جم عا}$$

۱۴۔ زبروں سے مراد تفرق لمجاظ سن کے ہے۔ اگر مرکز انحناء کے محدود (ضاماً) ہوں تو مساواتوں جم فم = لا، جب فم = ما کو تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ

$$\frac{ا}{ک} = \frac{لا}{ما} = \frac{ا}{ک} ، \frac{لا}{ما} = \frac{ا}{ک} = (لا) + (ما)$$

اور ضا = لا + ک لا عا = ما + ک ما
۱۵۔ ضابطہ (ع) سے ثابت کرو کہ نقطہ انعطاف کے لئے شرط ہے

$$ع + \frac{و ع}{ر ط م} = ۰$$

۱۶۔ دائرہ (لا- عا) + (ما- ب) = د اور منحنی ما = ف (لا)

ایک دوسرے کو نقطہ سن (ا، ب) پر قطع کرتے ہیں، اگر نقطہ سن پر عفا ما اور عفا ما کی قیمتیں دائرہ اور منحنی دونوں کے لئے ایک ہی ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ نقطہ سن پر منحنی کا دائرہ انحناء ہے۔

نقطہ سن پر دائرہ اور منحنی دونوں کا ماس ایک ہی ہے کیونکہ سن دائرہ اور منحنی دونوں پر واقع ہے اور دائرہ کا ڈھال نقطہ سن پر مساوی ہے منحنی کے ڈھال کے اسی نقطہ پر۔ دائرہ کی مساوات کو دو مرتبہ تفرق کرو اور تفرق کے بعد

لا، ما، عفا، عفا، ما کی بجائے بالترتیب ا، ب، ف (ا)، ف (ا)، ف (ا) رکھو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$(۱) \dots\dots\dots (۱) = د + (ب-ب) + (ع-ع)$$

$$(۲) \dots\dots\dots (۲) = ف (ا) + (ب-ب) + (ع-ع)$$

$$(۳) \dots\dots\dots (۳) = ف (ا) + (ب-ب) + (ع-ع)$$

(۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب۔ ببا} = - [+ \{ \text{ف} (۱) \}] \div \text{ف} (۱)$$

$$\text{۱۔ عبا} = \text{ف} (۱) [+ \{ \text{ف} (۱) \}] \div \text{ف} (۱)$$

یہ قیمتیں (۱) میں مندرج کرنے کے لئے

$$\text{د} = [+ \{ \text{ف} (۱) \}] \div \text{ف} (۱) \dots\dots\dots (۴)$$

لیکن (۴) سے جو د کی قیمت حاصل ہوتی ہے وہ نقطہ ف پر نیم قطر انخما ہے اور (عبا، ببا) نقطہ ن پر کے مرکز انخما کے محد ہیں۔

تعریف۔ دو منحنی فَا (۱) اور فَا (۲) جو ایک دوسرے کو نقطہ (۱) پر قطع کریں وہ ف (۱) پر ایک دوسرے کے ساتھ، ویں رتبہ کا تماس رکھتے ہیں اگر فَا (۱) = ف (۱) فَا (۲) = ف (۲)۔

$$\text{فَا} (۱) = \text{ف} (۱) \text{ لیکن فَا}^{۱+۰} (۱) \text{ مساوی نہ ہو ف}^{۱+۰} (۱) \text{ کے}$$

اس لحاظ سے دائرہ انخما اصلی منحنی کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔

ثلیلہ کے مسئلہ (دفعہ ۴۳) سے معلوم ہوگا کہ جب دو منحنی ایک دوسرے کے ساتھ نقطہ (۱) پر، ویں رتبہ کا تماس کریں تو (۱) ب (۱) کے نزدیک متناظر معینوں کا فرق فَا (۱) - ف (۱) (۱) (۱) ویں رتبہ کا صغاریہ ہوگا جبکہ لا - ۱ کو صغر صغاریہ خیال کیا جائے۔ کیونکہ

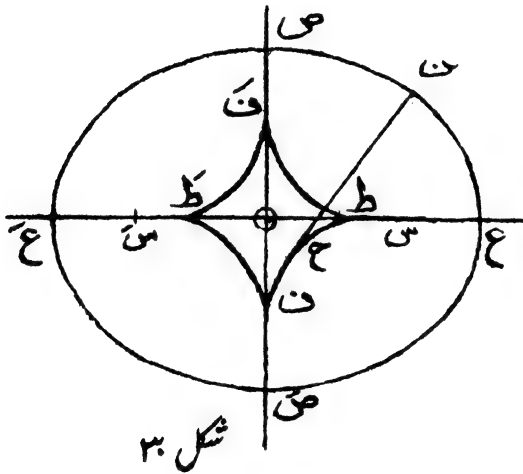
$$\text{فَا} (۱) - \text{ف} (۱) = \frac{(۱ - ۱)}{(۱ + ۱)} \{ \text{فَا} (۱) - \text{ف}^{۱+۰} (۱) + \text{ب} \}$$

جہاں ب صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۱۔

۳۴۔ برہیچہ، درہیچہ، متوازی منحنی۔
تعریف۔ کسی منحنی کے مرکز انخما کے طریق کو ہم اس منحنی کا برہیچہ کہینگے۔

منہی کے کسی نقطہ (لا، ما) کے جواب میں جو مرکز انخراح ہے اس کے محدود (ضا، عا) ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں
 ضا = لا۔ سر جب ضا، عا = ما + سر جسم ضا..... (۱)
 چاروں مقداریں لا، ما، ضا، سر ایک ہی مقدار لایا یا س یا ت کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں۔ اگر اس مقدار کو مساواتوں (۱) سے ساظ کیا جائے تو ضا، عا میں ربط لیگا جو منہی کے برہمچہ کی مساوات ہوگی۔

ناقص کے برہمچہ کی مساوات (لا، لا) + (ب، ما) = (ا، ب) (۲)
 پہلے معلوم کی گئی ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۳۳ مثال ۳) اور اس کی ترسیم شکل ۳۰ میں کی گئی ہے۔



ناقص کے راسوں ع، ع، ص، ص کے جواب میں انخرا کے مرکز ط، ط، ف، ف ہیں اور ع ط = ع ط = ب، ف ص = ص ف = ب
 یہ واضح ہے کہ نصف قطر انخرا کو منہی کے مرسم کرنے میں کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

ذیل میں برہمچہ کی مشہور خاصیتیں مندرج ہیں۔
 (۱) مفروضہ منحنی کے نقطہ Δ پر کا عماد برہمچہ کے نقطہ Δ پر ماس ہے۔
 (۲) برہمچہ کی کسی توس کا طول اصلی منحنی میں انحناء کے ان نیم قطروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے جو توس کے سروں کے متناظر نقطوں پر کھینچے جائیں۔
 (۱) مساواتوں (۱) میں s کو جو مفروضہ منحنی کی توس کا طول ہے متغیر متبع مانو،

$$\frac{\text{فرضا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{رلا}}{\text{فرس}} - \text{رجم فدا} \frac{\text{فدا}}{\text{فرس}} - \text{جب فدا} \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$$

$$= - \text{جب فدا} \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{کیونکہ} \frac{\text{رلا}}{\text{فرس}} = \text{جم فدا} ، \frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{فدا}}{\text{فرس}}$$

$$\text{اسی طرح سے} \frac{\text{رعا}}{\text{فرس}} = \text{جم فدا} \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{اس لئے} \frac{\text{رعا}}{\text{فرضا}} = \frac{\text{رعا}}{\text{فرس}} = - \text{م فدا}$$

اب مرکز انحناء (ضبا، عا) Δ پر کے عماد پر واقع ہے اور برہمچہ کا دھال نقطہ Δ پر $\frac{\text{رعا}}{\text{فرضا}}$ یعنی - م فدا ہے۔ لیکن مفروضہ منحنی کے نقطہ Δ جو عماد ہے اس کا دھال - م فدا ہے۔ اس لئے عماد Δ پر برہمچہ کے ماس پر منطبق ہوتا ہے۔

(۲) فرض کر دو کہ فرضا برہمچہ کی توس کا تفرقہ ہے، (۲) اور (۳) سے

$$\text{فرضا} = - \text{جب فدا} \frac{\text{فرس}}{\text{رعا}} = \text{جم فدا} \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$$

ایک درپچہ قسم کر لیا۔ پس کسی مفروضہ منحنی کا صرف ایک پرپچہ ہوتا ہے، لیکن اسکے بیشمار درپچے ہوتے ہیں۔
 دو درپچوں کا منحنی ایک منحنی کو متوازی منحنی کہتے ہیں کیونکہ ان کا باہمی عمودی فاصلہ مستقل ہے۔

۳۵۔ لفاف مساوات $\text{ما} = \text{عہا} + \frac{1}{\text{عہا}}$ (۱)

جہاں عہا اور ما مستقل ہیں ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اگر عہا کو کوئی مختلف مستقل قیمت مثلاً عہا دی جائے تو مساوات ہوجاتی ہے

(۲) $\text{ما} = \text{عہا} + \frac{1}{\text{عہا}}$

اور یہ ایک مختلف خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔
 (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع کے محدود ہیں

(۳) $\text{لا} = \frac{1}{\text{عہا}}$ ، $\text{ما} = \frac{1}{\text{عہا}} + \frac{1}{\text{عہا}}$

اب فرض کرو کہ عہا بلحاظ قیمت عہا کے قریب آتا جاتا ہے، اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ خط (۲) خط (۱) کے قریب آتا جائیگا، لیکن مساواتوں (۳) سے ظاہر ہے کہ جب عہا انتہا میں مائل بہ عہا ہو تو نقطہ تقاطع انتہائی صورت میں ایک محدود مقام کی طرف مائل ہوتا ہے جس کے محدود

(۴) $\text{لا} = \frac{1}{\text{عہا}}$ ، $\text{ما} = \frac{52}{\text{عہا}}$

ہیں۔ اگر ہم مساواتوں (۴) سے عہا کو ساقط کر دیں تو مساوات

(۵) $\text{ما} = 52 \text{ لا}$
 حاصل ہوتی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ عہا خواہ کوئی قیمت اختیار کرے، انتہائی نقطہ تقاطع مکانی (۵) پر واقع ہوتا ہے، نیز اسکی ریاضانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ عہا کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط (۱) مکانی کا ماس ہے۔

بالعموم کسی منحنی کی مساوات $f(x, y) = 0$ میں ایسے مستقل شامل ہوتے ہیں جو منحنی کی شکل، ناپ اور مقام کا تعین کرتے ہیں، ان مستقلوں کو سلسلہ وار مختلف قیمتیں دینے سے مختلف منحنیات کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے، لیکن اس جگہ ہم صرف اس صورت پر غور کریں گے جس میں صرف ایک مستقل کو مختلف قیمتیں دینے سے منحنیات کا سلسلہ حاصل ہو۔ اس سلسلہ کو ہم قبیل منحنیات کہیں گے۔ ایسی صورت میں مستقل کو قبیل کا متبادل کہتے ہیں، مثلاً (۱) میں $ax + by + c = 0$ خطوط مستقیم کے قبیل کا متبادل ہے۔ کسی قبیل کے کوئی دو منحنی بالعموم ایک دوسرے کو قطع کریں گے، اگر قبیل کے دو منحنیات m اور n کے لئے متبادل کی قیمتیں a اور b $a + b$ $a - b$ ہوں تو ان کا نقطہ یا نقاط تقاطع محدود انتہائی مقام اختیار کریں گے جبکہ a یا b بہ صفر ہو۔ ان انتہائی مقامات کے طریق کو قبیل منحنیات کا لفاف کہتے ہیں۔ مثلاً مسکانی (۵) قبیل (۱) کا لفاف ہے، کسی منحنی کا برہنجہ ایسے خطوط مستقیم کے قبیل کا لفاف ہے جو منحنی کے عماد ہوں۔ (دفعات ۳۲، ۳۴)

۳۶۔ لفاف کی مساوات۔ فرض کرو کہ مساوات

$f(x, y) = 0$ (۱) ایک قبیل منحنیات کو تعبیر کرتی ہے اور قبیل کا متبادل $g(x, y) = 0$ علامت میں جدا گانہ دکھایا گیا ہے، نظام کے کسی ایک منحنی کے لئے $g(x, y) = 0$ فرض کرو کہ مساوات

$f(x, y) = 0$ (۲) نظام کے ایک اور منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ (۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے محدود $f(x, y) = 0$ $g(x, y) = 0$ کو یعنی $\{f(x, y) = 0, g(x, y) = 0\}$ / $h(x, y) = 0$ (۳)

کو پورا کریں گے۔
(۳) کی انتہا $h(x, y) = 0$ کے لئے

جف ف (لا، ما، عا)

(۴) = جف عا

ہے اسلئے لفاف پر کے نقاط کے عدد مساواتوں (۱) اور (۴) کو پورا کرتے ہیں اور لفاف کی مساوات ان دو مساواتوں سے عا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اور کے ثبوت سے ظاہر ہے کہ (۴) کے مرتب کرنے میں لا اور ما دونوں کو مستقل قرار دیا گیا ہے۔

مثلاً اگر ف (لا، ما، عا) = - ما + عا لا + عا

جف ف (لا، ما، عا) = لا - عا

مساواتوں - ما + عا لا + عا = اور لا - عا =

سے عا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے ما = ۴ لا پس لفاف مکانی ہے
میں ۳۵ دفعہ ۳۵ میں حاصل کیا گیا۔

دفعہ ۳۵ میں ہم نے دیکھا کہ قبیل (۱) کا ہر ایک رکن مکانی (۵) کا ماس ہے۔ اب ہم ذیل کا مسئلہ ثابت کر چکے۔

مسئلہ۔ بالعموم کسی قبیل منحنیات کا لفاف قبیل کے ہر ایک رکن کو مس کرتا ہے۔
(۱) کے نقطہ (لا، ما) پر دو حال ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

جف ف + جف ف = جف ف
جف لا جف ما جف لا

جہاں عمل تفرق میں عا کو مستقل رکھنا چاہئے
بجائے اس کے لفاف کی مساوات حاصل کرنے میں عا کو (۱) اور (۴) میں
ساقط کیا جاتا ہے۔ اس لئے (۱) کو لفاف کی مساوات مانا جاسکتا
ہے بشرطیکہ عا کو لا، ما کا ایک ایسا تفاعل قرار دیا جائے
جس کا نتیجہ (۴) سے ہوتا ہے۔ پس لفاف کے کسی نقطہ

(لا، ما) پر کا ڈھال (۱) کا پورا مشتق لینے سے ماہل ہو گا پورا مشتق ذیل کی مساوات سے ماہل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف عا}} = \dots\dots\dots (۶)$$

اب فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) کے محدود (۱) اور (۴) دونوں کو پورا کرتے ہیں، اس طرح یہ نقطہ منحنی (۱) اور لفاف دونوں پر واقع ہو گا۔ نیز (۴) کی رو سے مساوات (۶) مساوات (۵) میں تحویل ہو جاتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطہ (لا، ما) پر ڈھال

حر ما / منحنی (۱) اور لفاف دونوں کے لئے وہی ہے۔ مسئلہ ثابت ہوا۔

یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ جف ف / جف لا، جف ف / جف ما، جف ف / جف عا دونوں صفر نہیں ہیں۔

اگر یہ صفر ہوں تو حر ما کی قیمت جو (۵) یا (۶) سے ماہل ہوتی ہے غیر معین ہوگی، اس صورت میں ممکن ہے کہ مسئلہ درست نہ ہو، مگر ایسی صورتوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

تحلیلی نقطہ نظر سے قبیل (۱) کے لفاف معلوم کرنے کا عمل وہی ہے جو تغیر عا کے تقابل ف (لا، ما، عا) کے موڑ کی قیمتیں معلوم کرنے کا عمل ہے جبکہ لا، ما کو مستقل مانا جائے۔

طالب علم عا کی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے قبیل ما = عا لا + عا کے چند خطوط کھینچے، اس طرح اسے ایک ایسے منحنی کا اچھا اندازہ ہو جائیگا جو اپنے ماسوں کا لفاف ہے۔ یہ خط باسانی کھینچ سکتے کیونکہ ان کے مقطوعے محاور پر بالترتیب

$$-\frac{1}{\text{عا}}، \frac{1}{\text{عا}} \text{ ہیں۔}$$

مثال ۱۔ مکانی ما = ۴ لا کا ریچھ مکانی کے عمادوں کا لفاف خیال کیا جا سکتا ہے۔

(ھ، گ) پر کا عماد ہے

$$۱۲ (گ-ما) + (گ) (لا-ھ) =$$

$$یا ۸ ما + ۱۲ (لا-۱۲) گ - گ = (۱)$$

$$\frac{گ}{۱۲} = ھ$$

کیونکہ مکافی کی مساوات سے ھ = $\frac{گ}{۱۲}$
گ کو خطوط مستقیم (۱) کے قبیل کا متبدل بنا کر اس کے لفاف کی مساوات دریا
(۱) کو لمباظ گ کے تفرق کرو، اس طرح حاصل ہوگا

$$۱۲ (لا-۱۲) گ - گ = (۲)$$

(۱) اور (۲) کے درمیان گ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۱۲ ما = ۱۲ (لا-۱۲) گ$$

جو پیرچہ کی مساوات ہے۔

مثال ۲۔ ان دائروں کا لفاف معلوم کرو جو مبدا میں سے گزرتے ہیں اور جن کے
مرکز دائرہ لا۔ ما = ج پر واقع ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ قبیل کے کسی دائرہ کا مرکز (عما، بھا) ہے، دائرہ کی مساوات ہے

$$لا + ما - عما - ۲ بھا = (۱)$$

مساوات میں مستقل رقم نہیں ہے کیونکہ دائرہ مبدا میں سے گزرتا ہے۔
چونکہ مرکز دائرہ پر واقع ہیں اس لئے

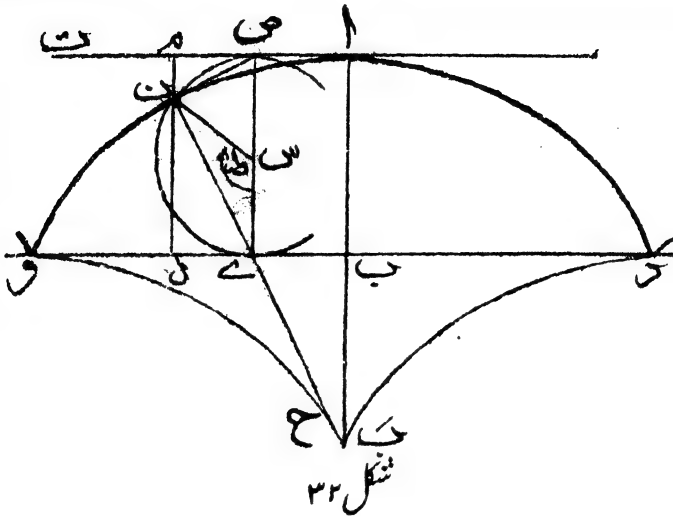
$$عما - ۲ بھا = ج (۲)$$

ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ مساوات (۲) کو بھا کے لئے عما کی رقوم میں حل کیا گیا
ہے اور پھر اس قیمت کو (۱) میں درج کر دیا گیا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات

(۱) میں دراصل ایک متبدل ہے لیکن اس میں زیادہ ہوت ہے کہ بھا کو عما کا
ایک ایسا تفاعل سمجھ کر جس کی نقیصہ (۲) سے ہوتی ہے مساواتوں کو لمباظ عما کے

تفرق کیا جائے پھر عما، بھا اور $\frac{بھا}{عما}$ کو ساقط کیا جائے۔

(۱) اور (۲) کو لمباظ عما کے تفرق کرنے سے



جہاں سے $ص$ سے نقطہ $س$ میں سے گزرنیوالا قطر ہے، (۱) خط تدویر کی مساواتیں ہیں۔

اگر $ط = \pi$ تو $لا = 1$ $و$ $ب$ اور $ن$ اس وقت نقطہ $ا$ پر ہوتا ہے اور اس حالت میں اس کا فاصلہ قاعدہ سے زیادہ سے زیادہ ہے، $ا$ کو اس کہتے ہیں جس وقت $ط = \pi$ تو $لا = 1$ $و$ $س$ اس وقت $ن$ کے برابر ہوتا ہے۔

محراب $و$ $ا$ کے گرد متشکل ہے $ب$ $ا$ کو محور کہتے ہیں۔ اگر دائرہ اور لکڑا ہے تو $ن$ سلسلہ وار کئی محراب متسم کرے گا جو $ا$ کے متماثل ہوں گے۔ جب خط تدویر کا ذکر کیا جائے تو بالعموم اس کے ایک محراب سے مراد ہوتی ہے۔ $ا$ اس صورت میں $ا$ $س$ ہے اور $ب$ $ا$ محور۔ خاصیتیں ذیل کے خواص یا سانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

$$(۱) \text{ سر فضا} = \text{عق} = \frac{\pi}{۲} \text{ مم} = \frac{\pi}{۲} \text{ مس} \left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} \right) = \text{سر ن} = \text{ص}$$

$$\text{اس کے فضا} = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} = \text{ن} = \text{ص}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ سن صی تماس ہے اور ن لے نقطہ سن پر کا غماو ہے۔

(۲) س = قوس و ح = ۱۴ (۱- جم ط) قوس و ۱ = ۱۴ و

(۳) $\text{ص} = \text{ح} = ۴$ واجب $\frac{\text{ص}}{\text{ح}} = ۲$ ح کے (تقدیراً)
 اگر ماس (حت) اور عواد (ب) کو محور مانا جائے اور $\text{ح} = ۴$ (حت) پر عمود کھینچا
 جائے تو $\text{کوٹہ} = \text{ص} = ۳$ - $\text{ح} = ۴$ - طہ -

اس صورت میں

لا = امة (طمة + جب طمة) ما = مئین = (ا - اجم طمة) ... (أ)
(ا) فذ = ذن ص م = $\frac{1}{4}$ طمة = ذن ص

(۱۲) س = قوس المن = ۴ وجب $\frac{ط}{۲}$ س = ۸ و ۸ = ۸ و ۸ = ۸ و ۸ = ۸

مرکز انحراف کے محدود ہیں

ضأ = ول + ٢ وجب $\frac{\text{ط}}{٢}$ جم $\frac{\text{ط}}{٢}$ = ١ (ط + جب ط)
عأ = ع ح جب $\frac{\text{ط}}{٢}$ = ١ - ١ (جم ط)

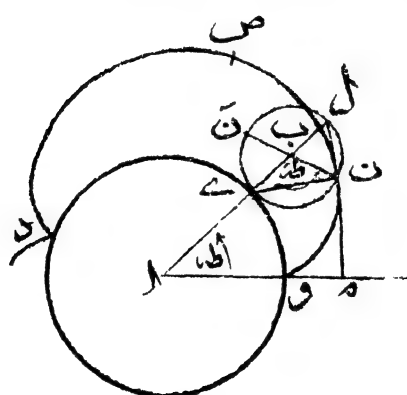
جب لڑکے والا دائرہ ثابت دائرہ کے گرد پورا حلقہ ہوتا ہے تو یہ
کو محول تدویر کہا جاسکتا ہے۔

شکل ۳۳ میں برتن دو پر کی تکوین دکھائی گئی ہے، نقطہ C مرسم نقطہ ہے اور نقطہ ابتدائی ہے۔ فرض کرو کہ ثابت اور لڑکنے والے دائروں کے نصف قطر بالترتیب a ، b ہیں زاویہ θ سے $a = r$ اور زاویہ ϕ سے $b = r$ ۔

قوس من = قوس و = یمنی ب طہ = لطمہ
(لا = 1 + ب) جم طہ - ب جم (طہ + طہ)

$$= (1 + \frac{b}{c}) \text{ جم طء } - \text{ ب جم } \frac{1 + \frac{b}{c}}{c} \text{ طء}$$

ما = (۱+ب) جب ط = ب جب $\frac{۱+ب}{ب}$ ط (۲)



شکل ۳۳

جب دائرے سے پرکے ماس کے ایک ہی جانب واقع ہوں یعنی درتدو پرکے لئے (ب > ا) اور مول تدو پرکے لئے (ب < ا) صرف ب کی علامت بدل دینا کافی ہوگا، درتدو پرکے مساواتیں اس شکل کی ہوں گی

$$\text{لا} = (\text{ا۔ب}) \text{جم ط} + \text{ب جم} \frac{(\text{ا۔ب}) \text{ط}}{\text{ب}}$$

$$\text{ما} = (\text{ا۔ب}) \text{جب ط} - \text{ب جب} \frac{(\text{ا۔ب}) \text{ط}}{\text{ب}} \dots (۳)$$

اگر نسبت ب : لا کوئی متوافق عدد ہو تو دائرہ ب کا مرسم نقطہ ن پھر ابتدائی نقطہ و پر واپس آئیگا جبکہ متحرک دائرہ ب ثابت دائرہ کے گرد ایک یا زیادہ دفعہ پورا الٹاں جائے۔ اگر نسبت ب : لا متباین ہو تو ح ن پھر و پر واپس نہیں آئے گا۔

استداری خط یا استداری۔ اگر مرسم نقطہ ن محیط پر واقع نہ ہو بلکہ ایک نصف قطر پر یا نصف قطر مخروطیہ پر واقع ہو تو مرسمہ منحنی کو ہم استداری یا بر استداری یا در استداری کہینگے۔

طالب علم باسانی دیکھ لیگا کہ اگر دائرہ کے مرکز سے ح ن کے فاصلہ کو نصف قطر کے ساتھ نسبت لیا : ۱ ہو تو مساواتوں (۱) میں جب ط اور جم ط کو لیا کے ساتھ ضرب دینے سے استداری کی مساواتیں حاصل ہونگی اور مساواتوں (۲) اور (۳) میں دوسری رقم کے سر جب کو لیا کے ساتھ ضرب دینے سے بالترتیب در استداری اور بر استداری خطوط کی مساواتیں حاصل ہونگی۔

مشق ۱۱

۱۔ ثابت کرو کہ مکافی $\text{ما} = ۲ \text{ لا}$ کی صورت میں
 $\text{س} = ۲ \text{ ا} - ۲ \text{ م} + ۲ \text{ ف} + ۲ \text{ ح} = ۲ \text{ ا} + ۲ \text{ م} + ۲ \text{ ف} + ۲ \text{ ح} = ۲ \text{ ا} + ۲ \text{ م} + ۲ \text{ ف} + ۲ \text{ ح}$
 پھر برعکس کی مساوات حاصل کرو۔

$$۲۔ \text{زائد لا} - \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱ \text{ کی صورت میں ثابت کرو کہ}$$

$$\text{و} = \text{ح} + \text{ب} - \text{لا} = \text{ب} - \text{ح} = ۰ \text{ یا } \text{ب} = \text{ح}$$

اور برہنہ کی مساوات ہے

$$(\text{لا} - \text{لا}) - (\text{ب} - \text{ما}) = (\text{ا} + \text{ب}) - (\text{ا} + \text{ب})$$

۳۔ ثابت کرو کہ قائم زائد لا ما = ج کے لئے

$$\text{ضاء} = \frac{3}{4} \text{لا} + \frac{3}{4} \text{ما} ، \text{ع} = \frac{3}{4} \text{ا} + \frac{3}{4} \text{ب}$$

اور برہنہ کی مساوات ہے

$$(\text{لا} + \text{ما}) - (\text{لا} - \text{ما}) = (\text{ج} - \text{ج})$$

۴۔ ثابت کرو کہ منہی لا + ما = ا کے لئے (ملاحظہ ہو دفعہ ۳۳، شق ۱)

ضاء = اجمت + اجمت جب ا = ع = اجمت + اجمت
اور برہنہ کی مساوات ہے

$$(\text{لا} + \text{ما}) + (\text{لا} - \text{ما}) = \text{ا} + \text{ب}$$

۵۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم لا + ما = ا کے قبیل کا نفاذ

(۱) جبکہ ع + ب = ا زائد لا ما = ا ہے

(۲) جبکہ ع + ب = ا مکانی لا + ما = ا ہے

(۳) جبکہ ع + ب = ا منہی لا + ما = ا ہے

متبادل ع + ب، جن شرائط کے تابع ہیں ان کا ہندی مفہوم بیان کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ ناقصوں لا + ما = ا کے قبیل کا نفاذ

(۱) جبکہ ع + ب = ا دو زائد لا ما = ا ہے

(۲) جبکہ $صا + ہا = ا$ منحنی $لا + ما = ا$ ہے

متبادل $صا$ ، $ہا$ جن شرائط کے تابع ہیں ان کا ہندی مفہوم بیان کرو۔
۷۔ ثابت کرو کہ مکافی کے دو ہرے معینوں کو قطر مان کر جو دائرے کھینچ سکتے ہیں
ان کالفات ایک مساوی مکافی ہے۔

۸۔ اگر $ن$ ، $ق$ ، $ب$ ، $م$ ایک نقطہ کے محددوں کے تفاعل ہوں اور $صا$ متبادل
ہو تو $ن$ $صا + ۲$ $ق$ $صا + م$ = کالفات

$ق$ - $ن$ = $م$ = ۰ ہے۔ اور $ن$ $جم$ $صا + ق$ $جب$ $صا = م$ کا
لفات $ن + ق = م$ ہے۔

۹۔ $م$ کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو ثابت کرو کہ خط مستقیم

$$ما = م لا + \{ (۱ + ب م) / (۱ + ب) \}$$

مخروطی $لا + ب م = ا$ کو مس کرتا ہے۔

۱۰۔ ایک متحرک خط مستقیم ہے دو ثابت نقطوں (ج) اور (ج) سے
اس پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے مربعوں کا (۱) حاصل ضرب (۲) مجموعہ مستقل
رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر صورت میں کالفات ایک مرکز دار مخروطی تراش ہے۔
۱۱۔ ثابت کرو کہ ناقص کے مرکزی نصف قطروں کو قطر مان کر جو دائرے بنا سکتے

ہیں ان کالفات $(لا + ما) = (لا + ب ما)$ ہے۔

۱۲۔ ناقصوں $(لا - صا) + (ما - ہا) = \frac{صا}{ب} + \frac{ہا}{ب} = ا$ کالفات جبکہ $صا$ ، $ہا$

مسادات $\frac{صا}{ب} + \frac{ہا}{ب} = ا$ کے ذریعہ مربوط ہوں ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ا$

ہے۔ ہندی زبان میں اس مسئلہ کو بیان کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے قبیل

۱۔ لا قط عدا - ب ماقم عدا = لا - ب

کاف منفی (لا) + (ب ماقم) = (لا - ب) ہے۔

۱۴۔ اگر شکل ۱۹ میں و سے ع تو ثابت کر دو کہ عاں پر کے ماس اور عدا کی مساواتیں ہیں

۱۔ لا جب فدا - ماحجم فدا = ع (۱)

۲۔ لا جم فدا + ماحجم فدا = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$ (۲)

اور (۲) سے ثابت کر دو کہ عاں = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$

منفی کو اس کے ماسوں کا لاف تصور کرو۔

۱۵۔ مثال ۱۴ میں جو ترقیم استعمال کی گئی ہے اس کے موافق ثابت کر دو کہ مرکز انخا کے محدود (ضا، عا) ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہوتے ہیں

ضا جم فدا + ماحجم فدا = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$ - ضا جب فدا + ماحجم فدا = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$

یا ضا = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$ جم فدا - $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$ جب فدا = عا = $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$ جب فدا + $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$ جم فدا

۱۶۔ اوپر کی دو مثالوں کی ترقیم کے موافق ثابت کر دو کہ و ح کا عل ح پر جہاں ح مرکز انخا ہے

- ضا جب فدا + ماحجم فدا

ہے اور و ح = ع - ضا جب فدا + ماحجم فدا = ع + $\frac{\text{فرع}}{\text{فرقدا}}$

۱۷۔ ثابت کر دو کہ کسی منفی کے پرمیچہ کا نصف قطر انخا و ح کے پرمیچہ کا نصف قطر انخا ہے

جہاں و ح اصل منفی کے متناظر نقطہ پر نصف قطر انخا ہے۔

دفعہ ۳۴، (۲) کو استعمال کرو، منحنی اور برہمیچہ کے لئے فرض دوہی ہے۔
 ۱۸۔ ایک منحنی، اس کے برہمیچہ اور اس کے انحنائے کے دو نصف قطروں کے درمیان جو رقبہ گھرجاتا ہے وہ ۱ ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{فرلا}{فرلا} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{۱}{۲} \times \left\{ ۱ + \left(\frac{فرلا}{فرلا} \right)^2 \right\} \div \frac{فرلا}{فرلا}$$

۱۹۔ ارجح ج ایک دائرہ کی قوس ہے جس کا مرکز O ہے اور نصف قطر OA ، ج C نقطہ ج پر تماس ہے اور AC دائرہ کے درہمیچہ کا ایک حصہ ہے، O کو محور OA اور $فدا$ کو زاویہ A ج مان کر ثابت کرو کہ $فدا$ کے محدد $(لا، ما)$ ہیں

$لا = ارجح فدا + ارجح فدا، ما = ارجح فدا - ارجح فدا$ اور درہمیچہ کی ذاتی مساوات ہے $نس = \frac{۱}{۲} ارجح فدا$ دائرہ کے سب درہمیچے متطابق مساوی ہیں اس لئے حوالہ کے وقت صرف دائرہ کا درہمیچہ، کہا جاسکتا ہے۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ دائرہ کے درہمیچہ کی $ع$ مساوات ہے

$$ع = ۲ + ۲$$

۲۱۔ ناقص کے برہمیچہ کا کل طول ہے

$$۲ (۲ - ۳) / ۲$$

۲۲۔ ثابت کرو کہ خط تدویر کی ذاتی مساوات جبکہ $رأس$ $اسد$ ہو چہاں سے $س$ ناپا جائیگا اور $ات$ ثابت تماس ہو $س$ ۴ $ارجح فدا$ ہے [شکل ۳۲]
 ۲۳۔ ثابت کرو کہ شکل (۳۳) میں $فدا$ $مر$ نقطہ $فدا$ پر کا تماس ہے اور $فدا$ سے عماد۔

کیونکہ $مس فدا = فرلا = ارجح فدا - ارجح فدا = مس (طما + طما) - مس (طما + طما)$

اور $فدا$ محور $لا$ کے ساتھ زاویہ $طما + ۲$ بنا رہا ہے۔ اسی طرح کے نتائج در تدویر کے لئے بھی درست ہیں۔

۲۴۔ شکل ۳۳ میں اگر برتدویر کی قوس وحن = س تو ثابت کرو کہ
 $\frac{\text{فرس}}{\text{قرطہ}} = ۲ \frac{(\text{ب} + \text{د})}{\text{ب}} \text{ جب } \frac{\text{طہ}}{\text{ب}} = \text{س} = \frac{\text{ب} (\text{د} + \text{ب})}{\text{د}} \frac{(\text{ا} - \text{ج})}{\text{ب}}$
 اور وحن کا طول ہے $\frac{\text{ب} (\text{د} + \text{ب})}{\text{د}}$ ہے۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ برتدویر کی ذاتی مسادہ ہے $\text{س} = \frac{\text{ب} (\text{د} + \text{ب})}{\text{د}} \frac{(\text{ا} - \text{ج})}{\text{ب}}$
 اور نصف قطر انحناء ہے $\text{ر} = \frac{\text{ب} (\text{د} + \text{ب})}{\text{ب} + \text{د}} \text{ جب } \frac{\text{وفا}}{(\text{د} + \text{ب})}$
 اسی طرح کے نتائج برتدویر کے لئے بھی درست ہیں اگر ب کی علامت
 بدل دی جائے۔

۲۶۔ اگر $\text{ب} = \frac{\text{د}}{۲}$ تو ثابت کرو کہ اس برتدویر کے چار قرن ہیں اور
 اس کی مسادہ تین ہیں $\text{لا} = \text{د}$ ، $\text{جم} = \text{طہ}$ ، $\text{ما} = \text{د}$ جب $\text{طہ} = \text{د}$
 طہ کو ساقط کرنے سے $\text{لا} + \text{ما} = \text{د}$ حاصل ہوتا ہے۔

۲۷۔ اگر $\text{ب} = \frac{\text{د}}{۲}$ تو ثابت کرو کہ خط درتدویر ثابت دائرہ کا قطر بن جاتا
 ۲۸۔ اگر $\text{ب} = \text{د}$ اور مسد نقطہ و پر ہو تو ثابت کرو کہ برتدویر خط صنوبری
 $\text{ر} = ۲ \frac{(\text{ا} - \text{ج})}{\text{ب}}$ بن جاتا ہے۔ یعنی
 $\text{رحم طہ} = \text{لا}$ ، $\text{ر} = \text{د}$ ، $\text{رحب طہ} = \text{ما}$
 ۲۹۔ مثال ۲۵ میں رکھو

$\text{وفا} = \frac{\text{د} (\text{ب} + \text{د})}{\text{د} + \text{ب}} + \text{س}$ ، $\text{س} = \frac{\text{ب} (\text{د} + \text{ب})}{\text{د}} + \text{س}$
 یعنی قوس کو وحن کے نقطہ وسطی ص (رأس) سے ناپنا
 شروع کرو اس طرح حاصل ہوگا

$$س = \frac{۲ب(۱+ب)}{۱} جب \frac{۱}{۲+۲ب} \frac{۱}{۱}$$

ثابت کرو کہ مسادات س = ل جب ن فہما ایک برتدویر کو تعبیر کرے گی
اگر ن ایک سے کم ہو اور درتدویر کو اگر ن ایک سے بڑا ہو۔
۳۔ اگر ایک منحنی اور اس کے برہیچہ کی متناظر قوتیں س اور ثما ہوں تو

$$ثما = \pm \frac{فرس}{فرقنا} + مستقل$$

مثال ۲۹ کے نتیجہ سے ثابت کرو کہ برتدویر کا برہیچہ ایک برتدویر ہے اور
درتدویر کا درتدویر ہے۔

۳۱۔ ایک دائرہ کے محیط پر متوازی شعاعیں پڑتی ہیں اور منعکس ہوتی
ہیں اور زاویہ انعکاس زاویہ وقوع کے مساوی ہے، دائرہ کا نیم قطر ۱ ہے
اور نقطہ وقوع (۱ جیم طما، ۱ جب طما) ہے محدودوں کا مبدأ دائرہ کا مرکز ہے
اور محور کا سمت وقوع کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ شعاع منعکس
کی مسادات ہے

$$ما جیم ۲ طما - لا جب ۲ طما + لا جب طما = .$$

اور شعاع منعکس کا لٹاف ذیل کی برتدویر ہے

$$لا = \frac{۱}{۳} (۳ جیم طما - جیم ۳ طما) ما = \frac{۱}{۴} (۳ جب طما - جب ۳ طما)$$

۳۲۔ اگر ایک ذرہ مرکزی مدار ایک ایسی قوت ق کے ماتحت ترسم کرے
جو سمتی نیم قطر کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرتی ہو تو مستقلہ ترقیم کے مطابق

$$و = \frac{ھ}{ع} - جہاں و رفتار ہے اور ع عمود کا طول۔$$

ثابت کرو کہ

$$ق = \frac{فرس}{فرقنا} (و) = ھ' ع' (فرطما + ع) جہاں ع = \frac{۱}{ر}$$

یہ مساوات مدار کی تفرقی مساوات ہے۔ اگر $Q = \frac{1}{2} \frac{dV}{dt}$ ثابت کرو کہ مدار ایک مخروطی ہے جہاں قوت کا مرکز اس کے ایک ماسکے پر ہے۔
(ملاحظہ ہوں دفعات ۶۰، ۶۱)



باب پنجم

لامتناہی سلسلے

۳۸۔ لامتناہی سلسلے۔ لامتناہی سلسلوں کی مکمل بحث کے لئے علم کرسٹل کے جبر و مقابلہ حصہ دوم کے متعلقہ ابواب کا مطالعہ کرے، ان کے متعلق نہایت عمدہ ابتدائی بیان اوسنگڈ کی کتاب ”لامتناہی سلسلوں کی تہہ“ (انٹروڈکشن ٹو انفنٹ سیریز، کمبریج، صوچیات متحدہ امریکہ، ہارورڈ یونیورسٹی) میں ملے گا۔ یہاں ہم اپنی توجہ صرف ان مسائل تک محدود رکھتے ہیں جو ابتدائے کثرت استعمال کرنے کی ضرورت ہوگی۔

لامتناہی سلسلہ کی تعریف۔ فرض کر دو کہ a, b, c, \dots مقادیر کی ایک جمعیّت ہے جو تعداد میں لانتہا ہے، اور n عدد n کا ایک وسیع قیمت تقابل ہے۔ نیز فرض کر دو کہ a, b, c, \dots پہلی n نمبروں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے، تب

$$S_n = a + b + c + \dots + n$$

اگر n کو لانتہا بڑھایا جائے تو سلسلہ (۱) لامتناہی سلسلہ ہو جائیگا۔

اگر n کے لانتہا بڑھنے سے مجموعہ S_n ایک معین محدود انتہا S کی طرف مائل ہو تو لامتناہی سلسلہ کو مستحق کہتے ہیں اور اس امر کو کئی طرح سے بیان کرتے ہیں، سلسلہ کا مجموعہ S ہے سلسلہ کی قیمت S ہے، سلسلہ قیمت S کی طرف مستحق ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ فرض کر دو کہ $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

یہاں $س_1 = 2 - \frac{1}{2}$ ، نہ $س_1 = 2 = س_2$

اگر n کے لا انتہا بڑھنے سے $س_n$ کسی معین محدود انتہا کی طرف مائل نہ ہو تو سلسلہ کو غیر مستند کہتے ہیں۔ اس صورت میں یا تو $س_n$ تعداد لا انتہا بڑھے گا اور سلسلہ منتشر کہلائے گا یا $س_n$ کی کوئی معین انتہا نہیں ہوگی اور اس حالت میں سلسلہ کو ہتھوڑی سلسلہ کہیں گے۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ $س_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
یہاں $س_n$ لا انتہا بڑھتا ہے اس لئے سلسلہ متع ہے۔

مثال ۳۔ فرض کرو کہ $س_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} \times 1$

اگر n جفت ہو تو $س_n$ صفر ہوتا ہے اور اگر طاق ہو تو ایک۔ اگرچہ اس صورت میں $س_n$ لا متناہی نہیں ہوتا تاہم اس کی انتہا ایک معین محدود مقدار نہیں ہے، اس لئے سلسلہ ہتھوڑا کہلاتا ہے۔
ظاہر ہے کہ اگر $ع_1، ع_2، ع_3، \dots$ سب متحد العلاست ہوں تو سلسلہ ہتھوڑا نہیں کر سکتا۔

ترتیبیم لا متناہی سلسلہ کو ہم اس طرح تعبیر کریں گے

$ع_1 + ع_2 + \dots + ع_n$ یا $ح_1 + ح_2 + \dots + ح_n$

ذیل کے سائل باسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

سئلہ ۱۔ اگر $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots$ قیمت $س_n$ کی طرف استفاق کرے تو

سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n$ کی طرف استفاق کریگا جہاں کوئی محدود مقدار

اس کا ثبوت آسان ہے اور طالب علم کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے۔

سئلہ ۲۔ اگر $ع_1 + ع_2 + \dots$ مائل بہ $س_n$ ہو اور $ع_1 + ع_2 + \dots$ مائل بہ t تو سلسلہ $(ع_1 + ع_2) + (ع_3 + ع_4) + \dots$ مائل بہ $(س_1 + t)$ ہوگا

ب-ج > ا > ب+ج، ا-ج > ب > ا+ج
 ۳۹۔ انتہا کا وجود کسی تفاعل کا تعین ایک لائن ہی سلسلہ سے
 ہو سکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ مستقیم ہو، مثلاً لائن ہی سلسلہ
 ۱+۱+۱+۱+۱

قیمت $\frac{1}{1-1}$ کی طرف مستقیم ہوتا ہے جب تک کہ لا تعداد ایک سے
 کم رہے۔ اس صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر $1 > 1 > 1$ تو تفاعل
 $\frac{1}{1-1}$ اس لائن ہی سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے یا سلسلہ تفاعل کا تعین
 کرتا ہے۔ اگر لا ایک سے بڑا ہو تو سلسلہ متعین ہوتا ہے اور یہ تفاعل
 $\frac{1}{1-1}$ کو مطلق تعبیر نہیں کر سکتا۔ علی نقطہ نظر سے صرف مستقیم سلسلے
 زیادہ تر کارآمد ہوتے ہیں، سوائے بعض قیود کے ان پر اسی آسانی سے
 ریاضی اعمال صادر ہو سکتے ہیں جو محدود رشتوں والے جملات پر غیر مستقیم
 سلسلے صرف خاص خاص حالات کے ماتحت استعمال میں آتے ہیں۔
 جب ایک سلسلہ دیا گیا ہو تو سلسلہ ہندسیہ کی طرح اس عدد کی
 فوراً تخصیص کر لینا جو اس کی انتہا ہو ایسا آسان نہیں ہوتا پس اس امر
 کی تحقیق کے لئے کسی خاص صورت میں سلسلہ کی انتہا ہے بھی یا نہیں
 کسی جانچ کا قائم کرنا ضروری ہے، اس غرض سے ہم ذیل کے تین مسائل
 بیان کرتے ہیں جو علاوہ ازیں سلسلوں کے استنتاج کے متعلق چند اضافہ
 آزمائشی اصولوں کے مضبوط کرنے میں کارآمد ہوں گے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ متغیر
 میں، ن کا ایک قیمت والا تفاعل ہے، اس میں ن کو لا انتہا
 بڑھانا پڑے گا۔ چونکہ تمام انتہاؤں میں ن ∞ ، اس لئے عمل میں
 ہم لاحقہ ن ∞ کو مدنظر کر دیں گے۔

مسئلہ ۱۔ اگر میں، ن کا ایک ایسا تفاعل ہو جو (ا) ن کے بڑھنے سے

$$\frac{1}{1+n} - \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} - \frac{1}{4+n} + \dots = \frac{1}{1+n} - \left(\frac{1}{2+n} - \frac{1}{3+n} \right) - \frac{1}{4+n} + \dots$$

$\frac{1}{1+n} >$ کیونکہ ہر خطوط و عدائی کے اندر کا جملہ مثبت ہے۔

اگر ف بنت ہو تو آخری خطوط و عدائی میں صرف ایک رقم ہوگی $\frac{1}{1+n}$ ۔

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \dots = \frac{1}{1+n} - \left(\frac{1}{2+n} - \frac{1}{3+n} \right) - \frac{1}{4+n} + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{3+n} - \frac{1}{4+n} \right) + \dots$$

بائیں طرف کا جملہ مثبت ہے۔ اسلئے اس $\frac{1}{1+n}$ سے اس $\frac{1}{1+n}$ صفر اور $\frac{1}{1+n}$ کے

درمیان واقع ہوتا ہے۔ اسلئے اس $\frac{1}{1+n}$ سے اس $\frac{1}{1+n}$ کی انتہا صفر ہے اور اس $\frac{1}{1+n}$ ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھینگے کہ یہ انتہا لوک ۲ ہے (صفحہ ۴۴ (۵)۔ پس

$$\text{لوک } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ظاہر ہے کہ اگر اس کی بجائے کوئی لا کا مسلسل تفاعل ف (لا) ہو تو بھی یہ تیغوں سے ملے (۱) (۲) (۳) اسکی صورت میں درست رہینگے۔

اگر لا ایک محدود انتہا لا کی طرف مائل ہوتا ہو تو ہم لا کی بجائے $\frac{1}{1+n}$ رکھ سکتے ہیں اس طرح ن کے لا انتہا بڑھنے سے لا کی انتہا لا ہوگی۔ اگر لا مال یہ ۵۵ ہوتا ہو تو ہم لا کی بجائے ن رکھ سکتے ہیں۔

۴۰۔ استدقاق پر کھنے کے طریقے۔ اگر لامتناہی سلسلے مجموعہ کا

اس جانچ کو آسانی سے استعمال نہیں کیا جاسکتا، اس لئے ہم ایک دوا اور جانچ کے طریقے حاصل کرتے ہیں جو آسانی سے استعمال میں آسکیں۔

مقابلہ کی جانچ۔ فرض کرو کہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots$ مثبت رقوم کا ایک سلسلہ ہے۔ اگر اس سلسلہ کی ہر ایک رقم، ایک اور مثبت رقوم والے مستند سلسلہ $ا_1 + ا_2 + ا_3 + \dots$ کی متناظر رقم سے کم ہو یا مساوی ہو تو سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots$ بھی مستند ہوگا لیکن اگر اس سلسلہ کی ہر ایک رقم مثبت رقوم والے ایک متع سلسلہ $ب_1 + ب_2 + \dots$ کی متناظر رقم کے مساوی ہو یا اس سے بڑی ہو تو سلسلہ $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots$ بھی متع ہوگا۔

فرض کرد که س = ح عر، ص = ح ا، ص = نها ص

تب $S \geq S' > S$ کیونکہ سلسلہ $S' + S' + S' + \dots$ کی سب قیمتیں مثبت ہیں، اس لئے S جو n کے بڑھنے سے بڑھتا ہے ہمیشہ S سے کم رہتا ہے یعنی S ایک ایسی انتہا S کی طرف مستقر ہوتا ہے جو S سے کم ہے یا اس کے مساوی ہے [دفعہ ۳۹ مسئلہ ۱]

انتساع کی صورت میں ثبوت طالب علم خود دہرایا کرے۔

نوٹ۔ یہاں ایک بات قابل توجہ ہے کہ اس صداقت کے لئے کسی سلسلہ کی بنیاد کرنے میں اگر ہم ضرورت خیال کریں تو رمیوں کی کسی محدود تعداد سے قطع نظر کر سکتے ہیں ان رمیوں کا اخراج صرف انتہائی قیمت پر اثر رکھیگا لیکن انتہا کے وجود پر اس کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔

مثال ۱۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ کو موسیقی سلسلہ کہتے ہیں، ثابت کرو کہ یہ منتفع ہے باوجود اس کے کہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ ۔

تیسری رقم سے شروع ہو کر سلسلہ دار ۲ رقمیں، پھر ۳ یا ۲ رقمیں، پھر ۲ یا ۳ رقمیں وغیرہ لوز۔

$$\text{اب } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ یا } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

اور اسی طرح -

پس ۴۲ رقموں تک مجموعہ بڑا ہے ذیل کے سلسلہ سے

$$(1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{42} \text{ ۴۲ رقموں تک}$$

یعنی بڑا ہے $1 + \frac{1}{2}$ سے - اسلئے ن کو ہم اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ سن کسی بڑ سے بڑے مفروضہ عدد سے بڑا ہو یعنی سلسلہ منتفع ہے -

مثال ۲ - سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ مستحق ہوگا اگر

$$n < 1 \text{ اور منتفع ہوگا اگر } n \geq 1$$

(۱) $n < 1$ دوسری رقم سے شروع ہو کر رقموں کو اکٹھا کر دیتے مثال میں

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ یا } \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} > \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \text{ یا } (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$$

وغیرہ وغیرہ پس مجوزہ سلسلہ ذیل کے سلسلہ سے کم ہے

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{7}) + \dots$$

جو ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی نسبت مشترک ایک سے کم ہے - اس لئے یہ مستحق ہے - مجوزہ سلسلہ بھی اس لئے مستحق ہے -

(۲) $n \geq 1$ صورت $n = 1$ پر مثال (۱) میں بحث کی گئی ہے -

جب $n > 1$ تو سلسلہ کی رقمیں موسیقی سلسلہ کی متناظر رقموں سے بڑی ہوتی ہیں - اس لئے اس صورت میں سلسلہ منتفع ہے -

$$\frac{ع_1 + 1}{ع_1} = \frac{ع_2}{ع_2 - 1} \div \frac{ع_3}{ع_3 - 1}$$

$$= \frac{ع_3 - 1}{ع_3}$$

ک = لا

اس لئے سلسلہ مستدق ہوگا اگر لا > ۱ اور متع ہوگا اگر لا < ۱
اگر لا = ۱ تو یہ یقینی سلسلہ ہے اور متع ہے۔

مثال ۳- ۱ + لا + $\frac{ع_2}{ع_2 - 1} + \frac{ع_3}{ع_3 - 1} + \dots$ (لا مثبت)

$$\frac{ع_1 + 1}{ع_1} = \frac{ع_2}{ع_2 - 1} ، ک =$$

اس لئے یہ سلسلہ (توت نامی سلسلہ دفعہ ۹ حصہ اول) لا کی ہر مثبت قیمت کے لئے مستدق ہے۔ ابھی ہم دیکھیں گے کہ یہ لا کی ہر مثبت یا منفی قیمت کے لئے مستدق ہے۔

۴۱- استدقاق مطلق، قوتی سلسلے

مسئلہ ۱- اگر کسی سلسلہ میں ہر دو مثبت اور منفی رقمیں موجود ہوں اور مستدق ہو جبکہ تمام منفی رقموں کی علامت بدل دی جائے تو یہ اپنی اصلی حالت میں بھی مستدق ہوگا۔

یہ ظاہر ہے کیونکہ منفی علامتوں کو بحال کرنے سے اس | اور ان | بن | اور دونوں مقدار میں کم ہونگے۔

تعریف ۱- اگر کسی سلسلہ میں مثبت، منفی رقمیں دونوں طرح کی موجود ہوں اور اس کی منفی رقموں کو مثبت بنانے سے جو سلسلہ بنے وہ مستدق ہو تو اصطلاحاً اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اصلی سلسلہ مطلق طور پر یا بلا قید مستدق ہے۔

یعنی $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots$ مطلق طور پر مستدق ہوگا اگر $ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots$

مستدق ہو۔ کسی اور طرح کے مستدق سلسلے کو نیم مستدق یا مستدق بالشرط کہیں گے۔
سلسلہ اکا عکس درست نہیں، سلسلہ $۱ع + ۲ع + ۳ع + \dots$ مستدق ہو سکتا ہے
اور $۱ع + ۱ع + ۱ع + \dots$ منتفع (ملاحظہ ہو مثال ۱)
نتیجہ صریح۔ ایک سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوگا اگر $\frac{۱ع + ۱ع}{۱ع}$ کی انتہا

تعداداً ایک کسر واجب کے مساوی ہو۔
مطلق طور پر مستدق سلسلے خاص اہمیت رکھتے ہیں، رقموں کی ترتیب کے
بدلنے سے مجموعہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ مستدق بالشرط سلسلہ کی رقموں کو اسی طرح
پر ترتیب دینا ممکن ہے کہ نیا سلسلہ جو پیدا ہو وہ مستدق ہو لیکن کسی اور انتہا کی طرف
استمداق کہے یا یہاں تک کہ منتفع ہو جائے۔ الفاظ ”بالشرط“ اور ”بلاشرط“
کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔ [ملاحظہ ہو جبر و مقابلہ کے مسئلہ حصہ دوم باب
۲۶، دفعہ ۱۳]

مسئلہ ۲۔ اگر تعداد $۱ع، ۲ع، ۳ع، \dots$ بسبب مثبت ہوں اور ان میں سے
ہر ایک اپنی رقم ماقبل سے کم ہو (یا اس کے مساوی ہو) نیز اگر $۱ع$ کی انتہا
صفر ہو تو سلسلہ

$$۱ع - ۲ع + ۳ع - ۴ع + \dots + (-1)^n ۱ع + \dots$$

مستدق ہوگا۔ اس سلسلہ کو متبادل سلسلہ کہا جا سکتا ہے۔
رقموں کی جفت تعداد کا مجموعہ ہم ذیل کی دو صورتوں میں لکھ سکتے ہیں۔

$$۱ع = (۱ع - ۲ع) + (۳ع - ۴ع) + \dots + (۱۰۰ن۲ع - ۱۰۱ن۲ع)$$

$$= ۱ع - (۱ع - ۲ع) - (۳ع - ۴ع) - \dots - ۱۰۰ن۲ع$$

پہلی صورت سے ظاہر ہے کہ $۱ع$ مثبت ہے اور $ن$ کے بڑھنے سے بڑھتا ہے

دوسری صورت سے ظاہر ہے کہ $۱ع$ سے کم ہے کیونکہ ہر فرق مثبت ہے

اس لئے س_۱ + س_۲ ایک انتہا (مثلاً س_۱) کی طرف مستحق ہوتا ہے۔

نیز س_۱ + س_۲ = س_۱ + س_۲ + ع_۱ + ع_۲، اب چونکہ ہنس_۱ + ع_۲ صفر ہے

اس لئے س_۱ + س_۲ اور س_۱ کی ایک ہی انتہا ہے، اس لئے سلسلہ مستحق ہے۔

نتیجہ صریح | بن | کم ہے ع_۱ سے۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$ سلسلہ تمام شرائط کو پورا کرتا ہے، اس لئے مستحق ہے جیسا کہ اس سے قبل (دفعہ ۳۹) میں بتایا گیا۔ لیکن سلسلہ

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$ متنع ہے۔

مسئلہ ۳۔ اگر سلسلہ ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + ... مطلق طور پر مستحق ہو اور

و_۱، و_۲، و_۳، ... میں سے ہر ایک مقدار ایک محدود مقدار ج سے کم ہو تو سلسلہ ع_۱ + و_۱ + ع_۲ + و_۲ + ع_۳ + و_۳ + ... مطلق طور پر مستحق ہو گا۔

سلسلہ | ع_۱ + و_۱ | + | ع_۲ + و_۲ | + ... کی قمیں ذیل کے سلسلہ کی متناظر رقموں سے کم ہیں

| ع_۱ + و_۱ | + | ع_۲ + و_۲ | + ... یا ج { | ع_۱ + و_۱ | + | ع_۲ + و_۲ | + ... }

اس لئے | ع_۱ + و_۱ | + | ع_۲ + و_۲ | + ... مستحق ہے اور اس لئے ع_۱ + و_۱ + ع_۲ + و_۲ + ... مطلق طور پر مستحق ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ جب ۱ لا جب ۲ لا جب ۳ لا جب ۴ لا

سلسلہ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ مطلق طور پر مستحق ہے اور

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی رقمیں ذیل کے ہندسی سلسلہ کی متناظر رقموں سے بڑی ہیں

$$\dots\dots\dots + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \dots\dots\dots$$

اس لئے سلسلہ مطلق طور پر مستند ہے جب تک کہ $\frac{1}{3}$ تعداد ایک سے کم ہو۔ اُس صورت میں جبکہ $\frac{1}{3} =$ سلسلہ مستند ہو سکتا ہے یا متع، لیکن اگر مستند ہو تو سلسلہ کی ہر ایک رقم جبکہ $\frac{1}{3} =$ سلسلہ محدود ہوگی اور سلسلہ مطلق طور پر مستند ہوگا جبکہ $\frac{1}{3}$ سلسلہ سے تعداد کم ہو۔

استدقاق کا وقفہ۔ جب ایک سلسلہ جسکی رقمیں $\frac{1}{3}$ کے تفاعل ہوں مستند ہو جبکہ $\frac{1}{3} > \frac{1}{3}$ تو ہم اسے یوں بیان کر سکتے ہیں کہ سلسلہ وقفہ (ب) کے اندر مستند ہے، جب سلسلہ $\frac{1}{3}$ کی قیمتوں $\frac{1}{3} > \frac{1}{3}$ کے لئے مستند ہو اور متع ہو $\frac{1}{3} > \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$ کے لئے تو (ب) کو استدقاق کا وقفہ کہتے ہیں۔

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots\dots\dots$$

مستند ہے (شرطاً) جبکہ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ اسلئے مطلق طور پر مستند ہے جبکہ $\frac{1}{3} > \frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$ متع ہے جبکہ $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ اور جبکہ $\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots\dots\dots$$

مطلق طور پر مستند ہے جبکہ $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}$ متع ہے جبکہ $\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$ ۔ دونوں سلسلوں کے لئے (۱، ۱) استدقاق کا وقفہ ہے۔

۴۲۔ کیساں استدقاق۔ جب ایک سلسلہ کی رقمیں $\frac{1}{3}$ کے تفاعل

ہوں اور سلسلہ ایک وقفہ کے اندر مستند ہو تو وقفہ میں کسی ایک معلومہ قیمت سے $\frac{1}{3}$ کے لئے ن کو اس طور پر منتخب کرنا ممکن ہوگا کہ باقی جب ایک دی ہوئی مقدار

کم ہو لیکن لا کی مختلف قیمتوں کے لئے بالعموم ن کی مختلف قیمتیں ہونگی جو باقی کو دینی مقدار سے کم بنائینگے۔ اسلئے

تعریف۔ ایک سلسلہ جبکی رقیب لا کے تفاعل ہوں ایک وقفہ کے اندر کیساں طور پر مستحق کہلاتا ہے اگر ن کو اس طور پر منتخب کرنا ممکن ہو مثلاً ن = م کہ ن کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو م کے مساوی یا اس سے بڑی ہو اور لا کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو وقفہ ممل کو رکھے اندر واقع ہو باقی ب ایک دی ہوئی نسبت مقدار صہ سے کم رہے۔

متغیر کو پیش نظر رکھنے کے لئے ہم یہ ترتیم اختیار کریں گے

ع (لا)، س (لا)، ب (لا)، س (لا)

مسئلہ ۱۔ اگر ایک سلسلہ ع (لا) + ع (لا) + کیساں طور پر مستحق ہو جبکہ لا \geq ب اور اگر اسی وقفہ کے اندر سلسلہ کی ہر رقم لا کا مسلسل تفاعل ہو تو مجموعہ س (لا) بھی اس وقفہ میں مسلسل تفاعل ہوگا۔

فرض کر دو کہ سعت کے اندر متغیر کی دو قیمتیں لا اور لا ہیں، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ اگر حصہ مقرر کر لیا جائے تو لا کو لا کے استقدر قریب لینا ممکن ہے کہ

اس (لا)۔ س (لا) | حصہ سے کم ہو۔ معمولی ترتیم کے مطابق

س (لا)۔ س (لا) = س (لا)۔ س (لا) + س (لا)۔ س (لا)

اور اسلئے اس (لا)۔ س (لا) \geq اس (لا)۔ س (لا) + اس (لا)۔ س (لا) + اس (لا)۔ س (لا)

اولاً چونکہ سلسلہ کیساں طور پر مستحق ہے ہم م کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اس صورت میں جبکہ ن \leq م دونوں ب (لا) اور ب (لا) صہ سے کم ہوں۔ فرض کر دو کہ م کو اس طرح پر منتخب کر لیا گیا ہے۔

دوسرے س (لا) مسلسل تفاعلوں کی محدود تعداد کا مجموعہ ہے، اسلئے ہم

ثبوت کے لئے ضروری ہے کہ لا وقفہ کے اندر ہو، ذیل کے مسئلہ (اپیل کے مسئلہ) کے ثبوت کے لئے ملاحظہ ہو کر شل کا الجبرا، حصہ دوم، باب ۲۶، دفعہ ۲۰، یعنی اگر ایک سلسلہ مستحق ہو، جبکہ لا = سر (یا - سر) تو جو تفاعل سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے وہ مسلسل ہو گا قیمت سر (یا - سر) تک اور شمولیت خود ان قیمتوں کے دوسرے الفاظ میں تفاعل کی قیمت جبکہ لا = سر دہی ہوگی جو کہ سلسلہ کی قیمت ہے جبکہ لا = سر جس طریقہ سے قوی سلسلہ کا یکساں استنتاج قائم کیا گیا ہے اس کی باسانی توسیع ہو سکتی ہے ذیل کے مسئلہ کے اثبات میں۔

مسئلہ ۳۔ اگر ایک سلسلہ کی قیمتیں لا کے مسلسل تفاعل ہوں جبکہ $1 \geq لا \geq ۰$ اور یہ قیمتیں، ایک مطلق طور پر مستحق سلسلہ کی متناظر قیمتوں سے جن میں لا شامل نہیں ہوتا تعداد کم ہوں تو اول الذکر سلسلہ وقفہ مذکورہ کے اندر یکساں طور پر مستحق ہوگا۔

طالب علم یکساں اور مطلق استنتاج میں التیاس نہ کرے، سلسلے یکساں طور پر مستحق ہو سکتے ہیں حالانکہ وہ مطلق طور پر مستحق نہ ہوں، مگر ایسے سلسلے ہماری کتاب کی مدد سے باہر ہیں۔

ذیل کی مشق میں سوالات ۹، ۱۰، ۱۱ خاص طور پر قابل توجہ ہیں۔

مشق ۱۲

۱۔ ثابت کر دو کہ ذیل کے سلسلے مستحق ہیں

$$(۱) 1 + 2^{-۱} + 3^{-۲} + 4^{-۳} + \dots \dots \dots (۲) لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots (۳) لا > ۰$$

$$(۳) \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \dots (۱ < لا < ۱)$$

۲۔ ثابت کر دو کہ ذیل کے سلسلے مستحق ہیں

$$(۱) \frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۶} + \dots (۲) 1 + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} + \dots$$

$$(۳) \quad \frac{1}{(1+n)} \geq (۴) \quad \frac{1+n}{1+n^2}$$

$$(۵) \quad \frac{1+n}{ج+ن} \geq [1 \neq 0]$$

$$۳- \text{ اگر } \frac{1}{۱} + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \dots = ج$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ (۱) } \frac{1}{۴} = \dots + \frac{1}{۱۶} + \frac{1}{۲۵} + \frac{1}{۳۶} + \frac{1}{۴۹} = ج$$

$$(۲) \quad \frac{۳}{۴} = \dots + \frac{1}{۱۵} + \frac{1}{۲۳} + \frac{1}{۳۱} = ج$$

ج کی قیمت $\frac{۳}{۴}$ ہے (مشق ۱۳ سوال ۲۲)

۴- ثابت کرو کہ ذیل کا سلسلہ (سلسلہ ثنائی)

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + \frac{۲(۱-۴)(۱-۴)(۱-۴)}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots$$

۴ کی ہر قیمت کے لئے مطلق طور پر مستحق ہے جبکہ $۱ > ۱$ ، لیکن متع ہے جبکہ $۱ < ۱$

$$\text{کیونکہ } \frac{۱+n}{ج} = \frac{۱+n}{ج} - ۱ = \frac{۱+n}{ج} - \frac{۱+n}{ج} = ۱ - \frac{۱+n}{ج} = \frac{ج-۱-n}{ج}$$

۵- اگر ف (ن) کا ایک منق، صحیح تفاعل ہو تو سلسلہ ج (ن) مطلق طور پر مستحق ہوگا جبکہ $۱ > ۱$ لیکن متع ہوگا جبکہ $۱ < ۱$

فرض کرو کہ ف (ن) = ل ن + ب ن + ... جہاں ف (ن)

کا درجہ رہے تب

بائشتم

ٹیلر کا مسئلہ

۴۳۔ ٹیلر کا مسئلہ۔ دفعہ ۲، حصہ اول میں ہم نے ذیل کی مساوات حاصل کی۔

$$ف(لا) = ف(ا) + (لا - ا) ف(ا) + \frac{1}{2} (لا - ا)^2 ف(ا) + \dots$$
 اور اگرچہ لا کے متعلق جو کچھ ہم جانتے ہیں وہ صرف اتنا کہ ہے کہ یہ ا اور لا کے درمیان واقع ہوتا ہے تاہم جب (لا - ا) چھوٹا ہو تو تفاعل ف(لا) یقینی طور پر ذیل کے درجہ دوم کے تفاعل سے تعبیر ہوتا ہے

$$ف(ا) + (لا - ا) ف(ا) + \frac{1}{2} (لا - ا)^2 ف(ا)$$

جس میں مختلف سر ف(لا)، ف(لا)، ف(لا) کی قیمتوں پر تبصرہ میں جبکہ لا = ا یہ ایک عام مسئلہ کی خاص صورت ہے، اب ہم عام مسئلہ پر بحث کریں گے۔ پہلے ہم ف(لا) کے لئے ایک بند جملہ حاصل کریں گے جس میں لا جیسا ایک معلوم عدد نہ ہوگا اس کے بعد تفاعل درجہ دوم کی بجائے ہم ایک قوی سلسلہ حاصل کریں گے۔ دفعہ ۲، حصہ اول میں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اس کی وہی ترمیم ضروری ہوگی تاکہ روشنی کا مسئلہ صرف ایک مرتبہ لگانا پڑے۔

فرض کر دو کہ ف(لا) اور اس کے پہلے مشتق لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہیں۔

ایک مقدار ف(ا) فرض کرو جسکی تعین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

ف (ب) - { ف (ا) + (ب - ا) ف (ا) + (ب - ا) ف (ا) + ...

..... + $\frac{(ب - ا)^{۱-۳}}{(ا - ۱)}$ ف (ا) = { (ب - ا) ف (ا) + ... (۱)

روٹی کے مسئلہ کی مدد سے ہم ق کے لئے ایک جملہ مائل کر سکتے ہیں جسکو
(۱) میں مندرج کرنے سے مطلوبہ عام مسئلہ مائل ہوگا۔

فرض کرو کہ ف (لا) ایک لا کا تقاطع ہے جس کی تعین ذیل کی مساوات
سے ہوتی ہے۔

ف (لا) = ف (ب) - ف (لا) - (ب - لا) ف (لا) - (ب - لا) ف (لا) ف (لا)
..... - $\frac{(ب - لا)^{۱-۳}}{(ا - ۱)}$ ف (لا) - (ب - لا) ف (لا) - ... (۲)

مساوات (۱) کی رو سے ف (ا) = ، نیز ف (ب) = ، مطابقاً۔

نیز ف (لا) اور ف (لا) دونوں مسلسل ہیں لا سے لا = ب تک
کیونکہ ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق حسب مفروض مسلسل ہیں۔ اسلئے
روٹی کے مسئلہ کی رو سے ف (لا) صفر ہے لا کی کم از کم ایک قیمت لا
کے لئے جو ا اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہے، (۲) کو تفریق کرنے اور تحویل

ف (لا) = - $\frac{(ب - لا)^{۱-۳}}{(ا - ۱)}$ ف (لا) + (ب - لا) ف (لا) - ... (۳)

اور چونکہ (ب - لا) صفر نہیں ہے، اس لئے

ق = $\frac{۱}{ا}$ ف (لا) = $\frac{۱}{ا}$ ف { (ا + ط) (ب - ا) } + ... (۴)

جہاں > ط > کیونکہ ا اور ب کے درمیان کا کوئی عدد
ا + ط (ب - ا) سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

(۴) سے ق کی جو قیمت مائل ہوتی ہے اسکو (۱) میں مندرج کرو اور
ا مقام ف (ا) (ب - ا) ف (ا) + ... کو مساوات کی دوسری

جانب لے جاؤ، اس طرح حاصل ہوگا

$$ف(ب) = (ف(ا) + (ب-ا) ف(ا) + \frac{(ب-ا)^2}{2} ف''(ا) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(ب-ا)^{n-1}}{(n-1)!} ف^{(n-1)}(ا) + \frac{(ب-ا)^n}{n!} ف^{(n)}(ا) + \dots$$

(۵) -----

اب ہم ب کی بجائے لا استعمال کر سکتے ہیں۔ (ا) میں ب کو ہم نے صرف اس لئے استعمال کیا ہے کہ اوسط قیمت کا مسئلہ نکلنے میں التباس پیدا نہ ہو۔

$$ف(لا) = (ف(ا) + (لا-ا) ف(ا) + \frac{(لا-ا)^2}{2} ف''(ا) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(لا-ا)^{n-1}}{(n-1)!} ف^{(n-1)}(ا) + \frac{(لا-ا)^n}{n!} ف^{(n)}(ا) + \dots$$

(۶) -----

سادات (۶) کا مسئلہ ٹیلر کے مسئلہ سے موسوم ہوتا ہے، اسکی خاص صورت جبکہ $ا = ۰$ حسب ذیل ہے۔

$$ف(لا) = (ف(۰) + لا ف(۰) + \frac{لا^2}{2} ف''(۰) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{لا^{n-1}}{(n-1)!} ف^{(n-1)}(۰) + \frac{لا^n}{n!} ف^{(n)}(۰) + \dots$$

(۷) -----

اے مکلا رن کا مسئلہ کہتے ہیں۔

جن شرائط کے ماتحت ٹیلر کا مسئلہ ثابت کیا گیا ہے وہ یہ ہیں، ف(لا) اور اس کے پہلے n مشتق مسلسل (اور اس لئے محدود) ہیں $لا = ۰$ سے لا کی اس قیمت تک جس کے لئے ف(لا) کی قیمت محسوب کی جاتی ہے۔ عدد طہ کے لئے صرف یہی کہا جاسکتا ہے کہ یہ ایک مثبت کسر واجب ہے۔

عام طور پر اسکی قیمت ن اور لا کی مختلف قیمتوں کے لئے مختلف ہوگی۔

ٹیلر کے مسئلہ میں باقی مساوات (۶) میں پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو
 میں (لا) سے تعبیر کرو اور آخری رقم کو جب (لا) سے۔ اس طرح
 ف (لا) = (لا) = (لا) + (لا) + (لا) اور

$$ب (لا) = \frac{(لا - ۱)^{ن+۱}}{ن} - \frac{(لا - ۱)^{ن}}{ن} \{ ۱ + (لا - ۱) + (لا - ۱)^۲ + \dots + (لا - ۱)^{ن-۱} \} \quad (۸)$$

اگر ہم ن کو لا انتہا برعبار دیں تو (۶) کے بائیں جانب کا مجموعہ ایک لامتناہی
 سلسلہ ہو جاتا ہے اور اگر جب (لا) صفر ہو تو یہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔
 ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق سب مفروض مسلسل ہیں اور ہر مشتق
 کو مسلسل رہنا چاہئے تاکہ ہم ن کو لا انتہا فرض کر سکیں۔ اس لئے
 مسئلہ۔ اگر ف (لا) اور اس کے سب مشتق سب زریعہ بحث میں مسلسل ہوں
 اور اگر جب (لا) کی انتہا صفر ہو تو لا متناہی سلسلہ

$$ف (لا) + (لا - ۱) ف (لا - ۱) + \frac{(لا - ۱)^۲}{۲} ف (لا - ۱) + \dots + (۱ - ۱) ف (۱ - ۱) \quad (۹)$$

جو (۶) میں ن کو لا متناہی فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستحق ہوگا اور تغاقل
 ف (لا) کو تعبیر کرے گا یعنی یہ سلسلہ ف (لا) کی جانب مستحق ہوگا۔
 [نوٹ ایسی صورتیں مرتب ہو سکتی ہیں جن میں (۹) مستحق ہو لیکن قیمت ف (لا)
 کی جانب مستحق نہ ہو، لیکن عام علمی حالات میں ایسی صورتیں واقع نہیں ہوں گی]

سلسلہ (۹) کو ف (لا) کے لئے ٹیلر کا سلسلہ کہتے ہیں جب
 (۶) اور (۹) میں تمیز کرنا مقصود ہو تو (۶) کو ٹیلر کے ضابطہ سے ہم موسوم کر سکتے ہیں
 ظاہر ہے کہ اوپر جو کہ ٹیلر کے سلسلہ کے متعلق ذکر کیا گیا ہے وہ سب چہرہ
 اس کی خاص صورت مظاہر کے سلسلہ

$$ف (۰) + (۰) ف (۰) + \frac{(۰)^۲}{۲} ف (۰) + \dots + (۰) \quad (۱۰)$$

مسئلہ سے کام لینا پڑیگا اور باقی کی دو ذیل کی صورتیں استعمال میں آئیں گی۔
 جب (لا) = $\frac{لا}{ان}$ ف (طلا) (ب) (لا) = $\frac{لا}{ان-طلا}$ ف (طلا)
 پہلی سنگرائنج کی شکل ہے اور دوسری کوشی کی۔

۴۴۔ (۱) جب لا

ف (لا) = جب لا ف (لا) = جم لا ف (لا) = جب لا ف (لا) = جم لا

ف (لا) = جب لا ف (لا) = جب (لا + $\frac{ن}{۲}$)

اسے ف (۰) = ۰، ف (۰) = ۱، ف (۰) = ۱۔

ف (۰) = ۰، ف (۰) = ۱، جب $\frac{ن}{۲}$ ف (طلا) = جب (طلا + $\frac{ن}{۲}$)

چونکہ جب (ن) صفر ہے یا \pm ہو جب اسکے کن جفت ہے یا طاق
 اس لئے لا کی جفت قوتوں کے سر صفر ہونگے اور پھیلاؤ میں صرف لا کی طاق
 قوتیں شریک ہونگی اور رقمیں متبادلاً مثبت اور منفی ہونگی۔ پس

جب لا = لا - $\frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} - \frac{لا^۷}{۷} + \dots + \frac{لا}{ان}$ جب (طلا + $\frac{ن}{۲}$)

نیز جب (لا) = $\frac{لا}{ان}$ جب (طلا + $\frac{ن}{۲}$) جو تعداد $\frac{لا}{ان}$ سے

بڑا نہیں ہے اور $\frac{لا}{ان}$ کی انتہا صفر ہے۔ پس ہم ذیل کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے

جب لا = لا - $\frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} - \frac{لا^۷}{۷} + \dots$

جو لا کی ہر محدود قیمت کے لئے مطلق طور پر مستحق ہے۔

(۲) جم لا - اسی طرح سے

$$\text{جم لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^4}{4} - \frac{\text{لا}^6}{6} + \dots$$

اور سلسلہ لا کی ہر عدد قیمت کے لئے مطلق طور پر مستحق ہے۔

$$(3) \text{ فو} - \text{ف (لا)} = \text{فو}^2, \text{ ف (لا)}^2 = \text{ف (لا)}^3 = \text{ف (لا)}^4 = \dots$$

$$\text{ف (لا)}^2 = 1, \text{ ف (لا)}^3 = 1, \text{ ف (لا)}^4 = 1, \dots$$

$$\text{اسلئے فو} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \dots$$

اور سلسلہ لا کی ہر عدد قیمت کے لئے مطلق طور پر مستحق ہے۔

$$(3) \text{ ف (لا)}^2 = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \dots$$

$$\text{ف (لا)}^2 = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \dots$$

$$\text{ف (لا)}^2 = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \dots$$

$$\text{اسلئے (لا)}^2 = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \dots$$

مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلہ $(1 + \text{لا})^n$ میں رقم پر ختم ہو جاتا ہے کیونکہ $\text{ف (لا)}^n = 1$ جبکہ $n < m$ اگر m مثبت صحیح عدد نہ ہو تو ہمیں ف (لا)^n پر غور کرنا ہوگا۔ ہم کو شکی شکل لینگے

$$\text{جب (لا)}^n = \frac{1 - \text{لا}^{n+1}}{1 - \text{لا}}$$

$$\text{لا متناہی سلسلہ} \quad 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \dots$$

مطلق طور پر مستحق ہوتا ہے اگر $|لا| < 1$ اور مستحق ہوتا ہے اگر $|لا| > 1$

(شق ۱۲ سوال ۴) اسلئے ہم (لا) کی صرف ان قیمتوں پر غور کریں گے جن کے لئے

$$\begin{aligned} & (1) \quad (1) > 1 \quad (2) \quad (1) > 1 \quad (3) \quad (1) > 1 \quad (4) \quad (1) > 1 \quad (5) \quad (1) > 1 \quad (6) \quad (1) > 1 \quad (7) \quad (1) > 1 \quad (8) \quad (1) > 1 \quad (9) \quad (1) > 1 \quad (10) \quad (1) > 1 \\ & (1) \quad (1) > 1 \quad (2) \quad (1) > 1 \quad (3) \quad (1) > 1 \quad (4) \quad (1) > 1 \quad (5) \quad (1) > 1 \quad (6) \quad (1) > 1 \quad (7) \quad (1) > 1 \quad (8) \quad (1) > 1 \quad (9) \quad (1) > 1 \quad (10) \quad (1) > 1 \end{aligned}$$

پہلا جزو ضربی ن کی ہر قیمت کے لئے محدود ہے کیونکہ $(1) + (1) > 1$ ، $(1) + (1) > 1$ ،

اور $(1) + (1) > 1$ کے درمیان واقع ہوتا ہے، دوسرا جزو ضربی ایک سے تجاوز

نہیں ہو سکتا، تیسرے جزو ضربی کی انتہا صفر ہے کیونکہ یہ مستحق سلسلہ

$$1 + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1 \quad (1) + (1) > 1$$

کی ن وین رقم ہے۔ اسلئے جب (لا) صفر ہے اور م کی تمام قیمتوں کے لئے جب تک کہ $1 > 1$ یا $1 > 1$ یہ لامتناہی سلسلہ $(1) + (1) > 1$ کی طرف مستحق ہوتا ہے۔

(ب) $1 \neq 1$ ، یہ صورتیں ایسی ضروری نہیں اور جب (لا) کی تحقیق طولانی ہے اس جگہ صرف ہم نتائج کا حوالہ دیں گے، ثبوت کے لئے ملاحظہ ہو کرسل کا الجبر، حصہ دوم، باب ۲۶ دفعہ ۶۔

$1 = 1$ ، سلسلہ مطلق طور پر مستحق ہے اگر $m < 1$ ۔ اور مستحق بالشرط ہے اگر $0 < m < 1$ ، سلسلہ اتہنازی ہے اگر $m = 1$ ۔ اور متنع اگر $m > 1$ ۔ $1 = 1$ ، سلسلہ مطلق طور پر مستحق ہوتا ہے اگر $m < 1$ ۔ اور متنع ہوتا ہے اگر $m > 1$ ۔

اگر $m \neq 1$ ب تو جملہ ثنائی $(1) + (1) > 1$ کو لکھو ایسے $(1) + (1) > 1$ یا $(1) + (1) > 1$

یا $(1) + (1) > 1$ اور پھر $(1) + (1) > 1$ کی بجائے لکھو اگر ب کم ہو

نقداداً اسے یا $(1) + (1) > 1$ کی بجائے لکھو اگر ب کم ہو

اس لئے لوک $(1 + \lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} + \dots$

جہاں $1 > \lambda \geq 1$ ، یہ سلسلہ بالشرط مستحق ہے جبکہ $\lambda = 1$ واضح ہو کہ $\lambda = 1$ کہنے سے

لوک $2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

(۶) لوکارتم محسوب کرنا۔ اوپر جو سلسلہ معلوم کیا گیا ہے وہ سرعت سے مستحق نہیں ہوتا اس لئے حسابات کی غرض سے چنداں موزوں نہیں۔

لوک $(1 + \lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} + \dots$ (۱)
 λ کی بجائے $-\lambda$ کہنے سے

لوک $(1 - \lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} + \dots$ (۲)

چونکہ لوک $(1 + \lambda) -$ لوک $(1 - \lambda) =$ لوک $\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$
 اس لئے تفریق سے

لوک $\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = 2 + \left\{ \lambda + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^3}{5} + \dots + \frac{\lambda^{2n}}{1 - 2n} + \dots \right\}$ (۳)

فرض کرو کہ λ مثبت ہے اور $\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = \frac{1 + \lambda}{\lambda} = 1 + \frac{1}{\lambda}$ جس سے $\lambda = \frac{1}{1 + \lambda^2} > 1$
 مساوات (۳) ہو جاتی ہے

لوک $(1 + \lambda) =$ لوک $1 + \frac{1}{\lambda} = \left\{ 1 + \frac{1}{1 + \lambda^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right)^3 + \dots \right\}$ (۴)

اس سے لوک $(1 + \lambda)$ معلوم ہو سکتا ہے اگر لوک λ معلوم ہو۔ یاد رہے کہ (۴) میں ایک قوی سلسلہ نہیں ہے۔

مفر اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ کے لوکار تم باسانی معلوم ہو سکتے ہیں مثلاً

$$ما = ۱، لوک ۲ = ۲ \left\{ \frac{1}{۳} + \frac{1}{۳ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۵} + \dots \right\}$$

$$ما = ۲، لوک ۳ = ۳ \left\{ \frac{1}{۵} + \frac{1}{۵ \times ۳} + \frac{1}{۵ \times ۵} + \dots \right\}$$

اب لوک ۴ = ۲ لوک ۲، لوک ۵، ما کی بجائے ۴ لکھنے سے حاصل ہوگا اور
لوک ۶ = ۲ لوک ۲ + ۳ لوک ۳ وغیرہ۔ سلسلہ (۴) سرعت سے مستحق ہوتا ہے
ما = ۲ کی صورت میں بھی۔ خاص اعداد کے لئے خاص ترکیبیں استعمال ہو سکتی
ہیں۔ مثلاً اگر ما = ۴۹ تو مساوات (۴) سے لوک کے معلوم ہوگا لوک ۲ اور
لوک ۵ کی رقوم میں اور سلسلہ بڑی سرعت سے مستحق ہوگا۔

طالب علم مزید معلومات اور حوالہ کی غرض سے کرسٹل کا جبر و مقابلہ
حصہ دوم، باب ۲۸، دفعہ ۱۱ دیکھے۔ متعلق ہائی گن کا قاعدہ۔

(۵) دائرہ کی قوس کے طول کے متعلق ہائی گن کا قاعدہ۔
اگر کل قوس کے وتر کا طول ۱ ہو اور نصف قوس کا وتر ب ہو تو قوس کا طول

$$(۱) تقریباً \frac{۸}{۳} ب - ۱ ہوگا۔$$

فرض کر دو کہ قوس کے سامنے دائرہ کے مرکز پر زاویہ طہ نیم قطری بنتا ہے
اور دائرہ کا نصف قطر ہے۔ تب ل = ر طہ اور

$$۱ = ۲ ر جب \frac{طہ}{۲} = ۲ \left\{ \frac{طہ}{۲} - \frac{۱}{۴} + \left(\frac{طہ}{۲} \right)^2 + \frac{۱}{۱۲۰} - \left(\frac{طہ}{۲} \right)^3 - \dots \right\}$$

(۱)

$$ب = ۲ ر جب \frac{طہ}{۲} = ۲ \left\{ \frac{طہ}{۲} - \frac{۱}{۴} + \left(\frac{طہ}{۲} \right)^2 + \frac{۱}{۱۲۰} - \left(\frac{طہ}{۲} \right)^3 - \dots \right\}$$

(۲)

(۲) کو ۸ سے ضرب دو اور (۱) کو تفریق کر دو، اس طرح طہ دانی رقم سا ق

ہو جائے گی۔

$$\text{اِس لئے ۸ ب۔ ۱ = ۲} \left\{ \frac{۳}{۲} ط - \frac{۳}{۲} ط + \frac{۳}{۲ \times ۱۲۰} ط + \dots \right\}$$

$$= ۳ ل \left\{ ۱ - \frac{۳}{۶۸۰} ط + \dots \right\}$$

اِس لئے ط اور اِس سے اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ل = ۸ ب - ۱$$

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ۳ کے زاویہ کی صورت میں انسانی غلطی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ سے کم ہے

$$\text{اور } ۴۵ \text{ " " " " " " } \frac{۱}{۲۰۰۰}$$

$$\text{اور } ۶۰ \text{ " " " " " " } \frac{۱}{۶۰۰۰}$$

۲۵۔ ن، وین مشتق کا محسوب کرنا۔

مکارن کے سلسلہ کی مدد سے کسی تفاعل کے لئے قوتی سلسلہ معلوم کرنے میں جو عملی مشکل پیش آتی ہے وہ ف (ن) (لا) کا نکالنا ہے۔ مذکورہ بالا صورتوں کے علاوہ بہت کم صورتیں ایسی ہیں جن میں ن، وال مشتق زیادہ نے قابل شکل اختیار نہیں کرتا۔ باقی ب (لا) کی بحث ناممکن ہے جب تک کہ ف (لا) معلوم نہ ہو جائے۔ بعض خاص صورتوں میں ف (ن) (لا) معلوم ہو سکتا ہے اور مکارن کا لامتناہی سلسلہ اگر مستحق ہو تو (بالعموم) وقفہ استدقاق کے اندر ف (لا) کو تعبیر کرتا ہے۔

اِس تعلق میں لیب تئیس کا مسئلہ (دفعہ ۶۸ کھضہ اول) نہایت کار آمد ثابت ہوتا ہے۔

بطور مثال کے ف (لا) = جب (ا) جب (لا) پر غور کرو۔
اِس صورت میں ف (لا) کو بلا واسطہ معلوم کرنا مشکل ہو گا اس لئے ہم

جب تک کہ $1 > 1 + 1$ لگاؤ سے پہلا ڈکی چند رقیب معلوم کرنا کافی ہوتا ہے اور بعض مقاصد کے لحاظ سے پہلا ڈکی چند رقیب معلوم کرنا کافی ہوتا ہے اور تھوڑی بہت محنت کے ساتھ چند مشتقوں کا نکال لینا دشوار نہیں ہوتا۔ مثلاً لوک $(1 + جب لا)$ کے پہلے تین چار مشتق باسانی محسوب ہو سکتے ہیں اور پہلا ڈکی پہلی تین رقیب حاصل ہوتی ہیں $لا - \frac{لا^2}{۲} + \frac{لا^3}{۶}$ لیکن ایسی صورتوں میں اس طرح کا عمل زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

$$ما = لا + لا^۲ + لا^۳ + ... (ف) = ب + ب + ب + ب + ...$$

سلسلہ $ب + ب + ب + ب + ...$ میں $ما$ کی بجائے پہلا سلسلہ مندرج کرو اور $لا$ کی قوتوں میں اسے ترتیب دو۔ $لا$ کی کافی طور پر چھوٹی قیمتوں کے لئے سلسلہ محصلہ مستحق ہوگا۔ مثلاً

$$ما = جب لا = لا - \frac{لا^2}{۲} + \frac{لا^3}{۶} + ...$$

$$لوک (1 + ما) = ما - \frac{ما^2}{۲} + \frac{ما^3}{۳} + ... اس لئے$$

$$لوک (1 + جب لا) = (لا - \frac{لا^2}{۲} + \frac{لا^3}{۶} + ...) - (\frac{1}{۲} (لا - \frac{لا^2}{۲} + \frac{لا^3}{۶} + ...) + \frac{1}{۶} (لا - \frac{لا^2}{۲} + \frac{لا^3}{۶} + ...) + ...)$$

$$= لا - \frac{1}{۲} لا^۲ + \frac{1}{۶} لا^۳ - ...$$

اس طریقہ کا ثبوت یہاں نہیں دیا جاسکتا۔

۴۴۔ سلسلوں کا تفریق اور تکمیل۔ بعض اوقات کسی تفاعل

کی خامیتیں اس لامتناہی سلسلہ کو استعمال کرنے سے جو تفاعل کو تعبیر کرتا ہے

بآسانی تحقیق ہو سکتی ہیں، اس لئے ہمیں دیکھنا چاہئے کہ کن شرائط کے ماتحت ایک لامتناہی سلسلہ رقم برقم تفرق یا تکمل ہو سکتا ہے۔ ہمیں یاد ہے کہ کسی مجموعہ کو تفرق یا تکمل کرنے کے قواعد صرف اس صورت میں ثابت کئے گئے تھے جبکہ رقموں کی تعداد محدود ہو، لامتناہی سلسلوں کی صورت میں اسکی توسیع کا جواز مزید تصدیق کا محتاج ہے۔

تکمل سے متعلق ایک مسئلہ سے ہم شروع کریں گے، حسب معمول صہ سے ایک چھوٹی اختیار ی مثبت مقدار مراد ہے۔

مسئلہ ۱۔ اگر سلسلہ $E, (A) + E, (A) + \dots + (A) = I$ سے $A = B$ تک یکساں طور پر مستحق ہوا اور $F(A)$ کی جانب اشتقاق کرے تو سلسلہ

$$F(E), F(A), F(A) + F(A), \dots, F(A) + F(A) + \dots + F(A) + F(A) = F(I)$$

.....

جہاں $1 \geq j \geq b$ بھی مستحق ہوگا اور قیمت

گرف (لا) مر لا کی طرف مائل ہوگا۔

فرض کرد که $f = (لا) = س + (لا) + ج + (لا)$ اور فرض

لبي (لا) = لبي (لا) مرلا' مني (لا) = لبي (لا) مرلا

$$\text{تب لى (لا)} = \text{كج (لا) مرلا} + \text{كج (لا) فرلا} + \dots + \text{كج (لا) مرلا}$$

اور کُف (لا) مر لا = لہی (لا) + مہی (لا)

جب $n \leq m$ تو باقی جی (لا) اور ب کے درمیان لا کی ہر قیمت کے لئے صہ سے کم ہو، اس لئے اگر m کی یہ قیمت منتخب کر لی جائے تو $n \leq m$ کے لئے مقدار صہ (لا) تعداد m ہوگی، صہ فرلا سے یعنی صہ (لا-ج) سے اسلئے اگر $n \leq m$ تو فرق

کُف (لا) مرلا۔ لیں (لا)

اس لئے مسئلہ (۱) کی رو سے

$$\text{ج}^{\text{لا}} \text{فا} (\text{لا}) \text{مر} \text{لا} = \text{ج}^{\text{لا}} \text{ع} (\text{لا}) \text{مر} \text{لا} + \text{ج}^{\text{لا}} \text{ع} (\text{لا}) \text{مر} \text{لا} + \dots$$

$$= \{ \text{ع} (\text{لا}) - \text{ع} (\text{ج}) \} + \{ \text{ع} (\text{لا}) - \text{ع} (\text{ج}) \} + \dots$$

$$= \text{ع} (\text{لا}) + \text{ع} (\text{لا}) + \dots - \{ \text{ع} (\text{ج}) + \text{ع} (\text{ج}) + \dots \}$$

$$= \text{ف} (\text{لا}) - \text{مستقل}$$

اس لئے $\frac{\text{مر}}{\text{لا}} \text{ج}^{\text{لا}} \text{فا} (\text{لا}) \text{مر} \text{لا} = \text{ف} (\text{لا})$ یعنی $\text{فا} (\text{لا}) = \text{ف} (\text{لا})$

دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک قوتی سلسلہ کو رقم برقم مکمل کیا جاسکتا ہے اگر لا دفعہ استدقاق کے اندر واقع ہو۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ جو سلسلہ قوتی سلسلہ کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے وہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے جبکہ دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲ کی ترقیم کے

مطابق - $\text{مر} > \text{لا} \geq \text{ب} > \text{مر}$ اور اس سلسلے

کا مشتق اس لئے اسکو رقم برقم تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ کیونکہ

سلسلہ $\text{حج} \text{لا} \text{د} \text{مطلق}$ طور پر مستحق ہے اور اسلئے $\text{لا} \text{د} \text{اہرن}$

کے لئے محدود ہے یعنی (فرض کر دو کہ) ج سے کم ہے۔
سلسلہ کے تفریق سے یہ سلسلہ حاصل ہوگا

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \dots + \text{لا} + \text{لا} + \dots + \text{لا} + \text{لا} + \dots$$

اگر صرف عددی قیمتوں کو ملحوظ رکھا جائے تو

$$ن \frac{1}{2} لا^1 = ن \frac{1}{2} لا^1 - ن^1 \frac{1}{2} لا^1 > ن \frac{1}{2} لا^1 - ن^1 \frac{1}{2} لا^1$$

اس لئے مشتقوں کے سلسلہ کی رتیں ذیل کے سلسلہ کی متناظر رتوں سے تعداداً کم ہیں

$$\frac{ن}{2} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{لا}{2} \right) + 3 \left(\frac{لا}{2} \right)^2 + \dots \right\}$$

لیکن یہ سلسلہ مطلق طور پر مستحق ہے کیونکہ جانچ کی نسبت $\frac{لا}{2}$ ہے جو تعداداً

ایک سے کم ہے۔ اسلئے مشتقوں کا سلسلہ کیساں طور پر مستحق ہے جبکہ لا

وقفہ (ا'ب) کے اندر کوئی عدد ہو جہاں اعداد لا اور ب ایسے ہیں کہ

$$س > لا > ب > ص \quad (وقفہ ۴۲، مسئلہ ۲)$$

$$شال لوک (ا+لا) = لا - \frac{1}{2} لا^2 + \frac{1}{3} لا^3 - \dots - (ا > لا \geq 1)$$

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$- \dots - لا^2 + لا - 1 = \frac{1}{ا+لا}$$

یہ مساوات درست ہے اگر $ا > لا > 1$ لیکن یہ درست نہیں رہتی اگر $ا = 1$

۴۷۔ مثالیں۔ اس جگہ ہم دو مثالیں حل کریں گے جن میں معلومہ

سلسلہ کو تکمیل کرنے سے ایک تفاعل کو بطور ایک سلسلہ کے پھیلا یا جائیگا۔

(۱) مس-الا

$$اگر - ا > لا > تو$$

$$\frac{1}{ا+لا} = 1 - لا^2 + لا^4 - \dots + (ا-1) لا^{ن2} + \dots (۱)$$

اس لئے صفر سے لا تک تکمیل کرنے سے

مس' ۱۱ = $\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۹} + \dots + \frac{۱}{۱۰۱} - \frac{۱}{۱۰۳} + \frac{۱}{۱۰۵} - \frac{۱}{۱۰۷} + \dots$ (۱)
 تفصیل (۱) صرف اس صورت میں ثابت کی گئی ہے جبکہ $۱ > ۱$ ، سلسلہ
 (۱) اتہنازی ہے جبکہ $۱ \neq ۱$ لیکن (۱) کے لئے مستحق ہے،
 اسلئے ہم ایبل کا مسئلہ (صفحہ ۱۹۲) لگا سکتے ہیں اور یہ حاصل کر سکتے ہیں کہ
 (۱) اس صورت میں بھی درست رہتا ہے جبکہ $۱ \neq ۱$ ۔
 اگر $۱ = ۱$ تو حاصل ہوتا ہے

$$(۱) \dots \dots \dots + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - ۱ = \frac{\pi}{۲}$$

سلسلہ (۱) کو π کے لئے گرد گردی کا (بعض اوقات لیب نینس کا)
 سلسلہ کہتے ہیں، لیکن یہ سرعیت سے مستحق نہیں ہوتا، اس لئے حساب نگاری
 غرض سے موزوں نہیں۔ مہینگی کا ضابطہ استعمال کرنے سے بہتر سلسلہ
 حاصل ہوتا ہے۔

$\frac{\pi}{۲} = \text{مس' } ۱ \left(\frac{۱}{۵} \right) - \text{مس' } ۱ \left(\frac{۱}{۲۳۹} \right)$
 اس ضابطہ کو استعمال کر کے پھیلاؤ (۱) کی مدد سے π کا محسوب کرنا غالباً
 کے لئے اچھی شق ہوگی۔ مس' ۱ $\left(\frac{۱}{۵} \right)$ اور مس' ۱ $\left(\frac{۱}{۲۳۹} \right)$ کے سلسلے
 بڑی سرعیت سے مستحق ہوتے ہیں، ان سے π کی قیمت اعشاریہ کے پانچویں
 یا چھٹے مقام تک باسانی حاصل ہوتی ہے۔

(۲) جب' ۱۱ - اگر $۱ > ۱$ تو ثنائی پھیلاؤ کی رو سے

$$\frac{۱}{۱-۱۱} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \dots + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \dots$$

اس لئے صفر سے لایک تکمیل کرنے سے

$$\text{جب } 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

ذیل کی مثال میں ہم دیکھیں گے کہ ایک سلسلہ کے ذریعہ ایک تھملہ کی تقریبی قیمت کس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔

(۳) اگر ایک سادہ رفاص کا طول لی ہو اور یہ خط انتصابی کے دونوں جانب زاویہ عدا میں سے ہتھرازا کرے تو اس کے پورے ہتھرازا کا وقت

$$= 2 \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$L = \frac{g}{2} \left(\text{جب } \frac{g}{2} \right) \text{ کے لئے ایک سلسلہ مطلوب ہے۔}$$

(۱-۱) جب $\frac{g}{2}$ کو مسئلہ ثنائی کی رو سے پھیلاؤ اور پھر رقم برقم تکمل کر دو۔ اس طرح

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

جب $\frac{g}{2}$ جب $\frac{g}{2}$ کے تکملے اس سے قبل دفعہ ۱۰ میں معلوم کئے گئے ہیں اسلئے

$$L = \frac{g}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \dots \right\}$$

اگر عدا چھوٹا ہو تو $\frac{g}{2}$ کے کو نظر انداز کر سکتے ہیں اس صورت میں

$$L = \frac{g}{2} \text{ اور پورے ہتھرازا کی مدت } = 2 \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$(۲) \text{ جم رلا درلا (رشتہ صبیح ہے)}$$

اگر $\frac{1}{r} > 1$ تو مشق ۱۲ سوال ۱۳ کی روش سے

$$\left\{ \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2} + \frac{1}{r-3} + \dots \right\} = \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2} + \frac{1}{r-3} + \dots$$

نیز $\frac{1}{r} = \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r(r-1)}$ اگر $r \neq 1$

اس لئے اگر سلسلہ کو $\frac{1}{r}$ کے ساتھ ضرب دیکر مکمل کیا جائے تو ہر رقم صفر ہو جائے گی سوائے $\frac{1}{r}$ جو $\frac{1}{r(r-1)}$ کے، اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r(r-1)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r(r-1)}$$

اسے $\frac{1}{r}$ کی قوتوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔ یا (۱) میں $\frac{1}{r}$ کی بجائے $\frac{1}{r^2}$ لکھ کر ہم $\frac{1}{r^2}$ سے ضرب دے سکتے ہیں۔ تھمکہ کی قیمت ہوگی $\frac{1}{r^2(r-1)}$

مشق ۱۳

۱۔ ثابت کرو کہ ذیل کے پھیلاؤ $\frac{1}{r}$ کی ہر محدود قیمت کے لئے درست ہیں

$$(1) \text{ جب } (r-1) = 1 \text{ جب } r=2 \text{ جب } r=3 \text{ جب } r=4 \text{ جب } r=5 \text{ جب } r=6 \text{ جب } r=7 \text{ جب } r=8 \text{ جب } r=9 \text{ جب } r=10 \text{ جب } r=11 \text{ جب } r=12 \text{ جب } r=13 \text{ جب } r=14 \text{ جب } r=15 \text{ جب } r=16 \text{ جب } r=17 \text{ جب } r=18 \text{ جب } r=19 \text{ جب } r=20 \text{ جب } r=21 \text{ جب } r=22 \text{ جب } r=23 \text{ جب } r=24 \text{ جب } r=25 \text{ جب } r=26 \text{ جب } r=27 \text{ جب } r=28 \text{ جب } r=29 \text{ جب } r=30 \text{ جب } r=31 \text{ جب } r=32 \text{ جب } r=33 \text{ جب } r=34 \text{ جب } r=35 \text{ جب } r=36 \text{ جب } r=37 \text{ جب } r=38 \text{ جب } r=39 \text{ جب } r=40 \text{ جب } r=41 \text{ جب } r=42 \text{ جب } r=43 \text{ جب } r=44 \text{ جب } r=45 \text{ جب } r=46 \text{ جب } r=47 \text{ جب } r=48 \text{ جب } r=49 \text{ جب } r=50 \text{ جب } r=51 \text{ جب } r=52 \text{ جب } r=53 \text{ جب } r=54 \text{ جب } r=55 \text{ جب } r=56 \text{ جب } r=57 \text{ جب } r=58 \text{ جب } r=59 \text{ جب } r=60 \text{ جب } r=61 \text{ جب } r=62 \text{ جب } r=63 \text{ جب } r=64 \text{ جب } r=65 \text{ جب } r=66 \text{ جب } r=67 \text{ جب } r=68 \text{ جب } r=69 \text{ جب } r=70 \text{ جب } r=71 \text{ جب } r=72 \text{ جب } r=73 \text{ جب } r=74 \text{ جب } r=75 \text{ جب } r=76 \text{ جب } r=77 \text{ جب } r=78 \text{ جب } r=79 \text{ جب } r=80 \text{ جب } r=81 \text{ جب } r=82 \text{ جب } r=83 \text{ جب } r=84 \text{ جب } r=85 \text{ جب } r=86 \text{ جب } r=87 \text{ جب } r=88 \text{ جب } r=89 \text{ جب } r=90 \text{ جب } r=91 \text{ جب } r=92 \text{ جب } r=93 \text{ جب } r=94 \text{ جب } r=95 \text{ جب } r=96 \text{ جب } r=97 \text{ جب } r=98 \text{ جب } r=99 \text{ جب } r=100$$

$$(2) \text{ جب } r=1 \text{ جب } r=2 \text{ جب } r=3 \text{ جب } r=4 \text{ جب } r=5 \text{ جب } r=6 \text{ جب } r=7 \text{ جب } r=8 \text{ جب } r=9 \text{ جب } r=10 \text{ جب } r=11 \text{ جب } r=12 \text{ جب } r=13 \text{ جب } r=14 \text{ جب } r=15 \text{ جب } r=16 \text{ جب } r=17 \text{ جب } r=18 \text{ جب } r=19 \text{ جب } r=20 \text{ جب } r=21 \text{ جب } r=22 \text{ جب } r=23 \text{ جب } r=24 \text{ جب } r=25 \text{ جب } r=26 \text{ جب } r=27 \text{ جب } r=28 \text{ جب } r=29 \text{ جب } r=30 \text{ جب } r=31 \text{ جب } r=32 \text{ جب } r=33 \text{ جب } r=34 \text{ جب } r=35 \text{ جب } r=36 \text{ جب } r=37 \text{ جب } r=38 \text{ جب } r=39 \text{ جب } r=40 \text{ جب } r=41 \text{ جب } r=42 \text{ جب } r=43 \text{ جب } r=44 \text{ جب } r=45 \text{ جب } r=46 \text{ جب } r=47 \text{ جب } r=48 \text{ جب } r=49 \text{ جب } r=50 \text{ جب } r=51 \text{ جب } r=52 \text{ جب } r=53 \text{ جب } r=54 \text{ جب } r=55 \text{ جب } r=56 \text{ جب } r=57 \text{ جب } r=58 \text{ جب } r=59 \text{ جب } r=60 \text{ جب } r=61 \text{ جب } r=62 \text{ جب } r=63 \text{ جب } r=64 \text{ جب } r=65 \text{ جب } r=66 \text{ جب } r=67 \text{ جب } r=68 \text{ جب } r=69 \text{ جب } r=70 \text{ جب } r=71 \text{ جب } r=72 \text{ جب } r=73 \text{ جب } r=74 \text{ جب } r=75 \text{ جب } r=76 \text{ جب } r=77 \text{ جب } r=78 \text{ جب } r=79 \text{ جب } r=80 \text{ جب } r=81 \text{ جب } r=82 \text{ جب } r=83 \text{ جب } r=84 \text{ جب } r=85 \text{ جب } r=86 \text{ جب } r=87 \text{ جب } r=88 \text{ جب } r=89 \text{ جب } r=90 \text{ جب } r=91 \text{ جب } r=92 \text{ جب } r=93 \text{ جب } r=94 \text{ جب } r=95 \text{ جب } r=96 \text{ جب } r=97 \text{ جب } r=98 \text{ جب } r=99 \text{ جب } r=100$$

$$(۳) \text{ فوجب لا} = (۱ + لا) + لا^۲ + \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۴}{۴} + \dots + \frac{لا^۷}{۷} - \frac{لا^۸}{۸} + \dots$$

$$(۴) \text{ فوجم} = \text{جم} (\text{لاجب عا}) = ۱ + لا + \text{جم عا} + \frac{لا}{۲} \text{جم عا} + \frac{لا^۲}{۳} \text{جم عا} + \dots$$

ثابت کرو کہ عفا فوجم (لاجب عا) = فوجم (لاجب عا + ن عا)

۲۔ سوال ۱ (۲۵) سے جم لا (کجنز لاجب لا کجنز لاجب لا کجنز لاجب لا) کے پھیلاؤ حاصل کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ اگر $۱ > ۱$ تو

$$\text{لوک} = (۱ + لا + لا^۲) = لا + \frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۴}{۴} - \dots$$

۴۔ جہاں تک رقمیں پھیلاؤ میں دی گئی ہیں وہاں تک ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ قط لا} = ۱ + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۴}{۴} + \frac{لا^۶}{۶} + \dots$$

$$(۲) \text{ مس لا} = لا + \frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} + \frac{لا^۷}{۷} + \dots$$

$$(۳) \text{ لام لا} = ۱ - \frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۴}{۴} - \frac{لا^۶}{۶} - \dots$$

جم لا اور جب لا کی بجائے ان کے مرادف سلسلے رکھنے اور تقسیم کرنے سے یہ پھیلاؤ حاصل ہو سکتے ہیں۔ کیا ہم لا مکلا رن کے مسئلہ سے

پھیلاؤ جاسکتا ہے؟ اگر لا آتا جھوٹا ہو کہ اس کے مربع اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کر دی جاسکیں تو ثابت کرو کہ

$$\left\{ \frac{لا^۳}{۱۲۰} - \frac{۳}{۴} \right\} = \left\{ \sqrt{۱۵ - لا} + \sqrt{۱۲ + لا} \right\} \div \left\{ \sqrt{۱۲ + لا} + \sqrt{۱۵ - لا} \right\}$$

۶۔ اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ تو ثابت کرو کہ $f(x)$ اور $f'(x)$ کی انتہائیں $\frac{1}{x}$ کے لئے بالترتیب ۱ اور $-\frac{1}{x^2}$ ہیں۔ نیز مساوات $f(x) - f'(x) = \frac{1}{x} - (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

کو n بار تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ

$$\left\{ f^{(n)}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} \right\}$$

اور اس لئے اگر $n \rightarrow \infty$ تو

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} \right)$$

جہاں $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ کے لئے تفاضلوں کی جو انتہائیں ہیں انہیں $\frac{1}{x} = 0$ پر ان کی قیمتیں منظور کیا جائے۔

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} + \dots$$

ثابت کرو کہ $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} + \dots$ جبر و مقابلہ حصہ دوم، باب ۲۸، دفعہ ۶

$$8 - \text{ثابت کرو کہ } \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} + \dots$$

$$- \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+1}} + \dots$$

۹۔ اگر ف (لا) = $\frac{\text{جب}^1 \text{لا}}{\text{لا} - 1}$ تو ثابت کرو کہ

$$(1 - \text{لا})^n \text{ف}^n (\text{لا}) - \text{لا} \text{ف} (\text{لا}) = 1$$

اور اگر $\text{لا} > 1$ تو

$$\text{جب}^1 \text{لا} = \frac{\text{لا}}{\text{لا} - 1} = \frac{2}{3} + \text{لا} + \text{لا}^2 \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \text{لا}^3 \frac{2 \times 2 \times 2}{4 \times 5 \times 3} + \dots$$

۱۰۔ سوال ۹ سے ثابت کرو کہ

$$(1) \text{طہ} = \text{جب} \text{طہ} \text{جم} \text{طہ} (1 + \frac{2}{3} \text{جب}^2 \text{طہ} + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} \text{جب}^3 \text{طہ} + \dots)$$

$$(2) \text{مس}^1 \text{ای} = \frac{\text{ای}}{1 + \text{ای}} \left\{ 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{1 + \text{ای}} + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} \left(\frac{\text{ای}}{1 + \text{ای}} \right)^2 + \dots \right\}$$

رکھو لا = جب طہ، مس طہ = ای

۱۱۔ سوال ۹ سے بذریعہ عمل تکس حاصل کرو کہ اگر $\text{لا} > 1$ تو

$$\frac{1}{4} [\text{جب}^1 \text{لا}]^2 = \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2 \times 2}{5 \times 3} + \dots + \frac{\text{لا}^6}{6}$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ جم (واجبہ لا) مساوات (۳) دفعہ ۴ کو پورا کرتی ہے اور ثابت کرو کہ

اگر $\text{لا} > 1$ تو

$$\text{جم} (\text{واجبہ لا}) = 1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^2 - 2}{4} - \frac{\text{لا}^2 - 2}{4} + \frac{\text{لا}^2 - 2}{4} - \dots$$

۱۳۔ جب (واجبہ لا) اور جم (واجبہ لا) کے سلسلہ سے ثابت کرو کہ

$$(1) \text{جب}^3 \text{طہ} = \text{جب}^2 \text{طہ} - \frac{\text{لا}^2 - 2}{3} \text{جب}^2 \text{طہ} + \frac{\text{لا}^2 - 2}{5} \text{جب}^3 \text{طہ} - \dots$$

$$(۲) \text{ جم } م ط م = ۱ - \frac{م}{۲} \text{ جب } ط م + \frac{م(۲-م)}{۲} \text{ جب } ط م - \dots$$

جم م ط م، جب م ط م کے لئے سلسلے جب (۱) اور جم (۱) جب (۱) لا
 جم ط م جم ط م
 کو تفریق کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں -
 ۱۴- اگر $۱ > ۱$ تو ثابت کر دو

$$(۱) \text{ لوگ } \{ (۱+۱) + (۱+۱) \} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} + \dots$$

$$(۲) \frac{۱}{۲} = \left\{ (۱+۱) + (۱+۱) \right\} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} + \dots$$

۱۵- اگر $۱ > ۱$ تو ثابت کر دو

$$(۱) \text{ جو جب } ۱ = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸} + \dots$$

$$(۲) \left\{ (۱+۱) + (۱+۱) \right\} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸} + \dots$$

استدقاق ثابت کرنے کے لئے ملاحظہ ہو کہ ہر دو (۱) اور (۲) میں طاق رقموں کے

تو (۱) $\text{جم } \pi - \frac{1}{4} \text{ جم } \pi + \frac{1}{3} \text{ جم } \pi - \dots = \text{لوک } (\frac{1}{4} \text{ جم } \pi)$

(۲) $\text{جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi + \frac{1}{3} \text{ جب } \pi - \dots = \frac{1}{4} \pi$

ثابت کرو کہ سلسلہ (۲) متقابل $\frac{1}{4} \pi$ کو صرف اسی حالت میں تعبیر کرتا ہے

جبکہ $\pi > \pi > \pi$ اور سلسلہ کی قیمت جبکہ $\pi = \pi$ صفر ہے لیکن $\pi < \pi$ کے لئے سلسلہ کی انتہا $\frac{1}{4} \pi$ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگرچہ اوپر کے دونوں سلسلے مستحق ہیں لیکن ان میں سے کوئی بھی رقم برقم تفرق نہیں ہو سکتا (مشق ۱۲، ۱۵)

۲۰۔ مثال ۱۹ میں π مساوی $\pi - \pi$ رکھنے سے حاصل کرو کہ اگر $\pi > \pi > \pi$

تو (۱) $\text{جم } \pi + \frac{1}{4} \text{ جم } \pi + \frac{1}{3} \text{ جم } \pi + \dots = \text{لوک } (\frac{1}{4} \text{ جب } \pi)$

(۲) $\text{جب } \pi + \frac{1}{4} \text{ جب } \pi + \frac{1}{3} \text{ جب } \pi + \dots = \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{4} \pi$

۲۱۔ سوال ۲۰ (۲) کو مکمل کرنے سے ثابت کرو کہ اگر $\pi \geq \pi \geq \pi$ تو

$$\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{4} \pi = \left(\text{جم } \frac{1}{4} \pi + \text{جم } \frac{1}{3} \pi + \text{جم } \frac{1}{4} \pi + \dots \right) - \left(\text{جم } \frac{1}{4} \pi + \text{جم } \frac{1}{3} \pi + \text{جم } \frac{1}{4} \pi + \dots \right)$$

جہاں $\text{جم } \pi = \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{3} \pi + \frac{1}{4} \pi + \dots$

سلسلہ π کی ہر قیمت کے لئے یکساں طور پر مستحق ہے، اس لئے مکمل کے بعد ہم π کو قیمتیں صفر اور π دے سکتے ہیں، لیکن یہ دوری سلسلہ ہے اور وقفہ

(۰، π) کے باہر متقابل $\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{4} \pi$ کو تعبیر نہیں کرتا۔

۲۲۔ سوال ۲۱ سے حاصل کرو کہ

$$\frac{1}{4} \pi = \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad (۲) \quad \frac{1}{4} \pi = \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad (۱)$$

$$\frac{2\pi}{12} = \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \quad (3)$$

(۱) حاصل کرنے کے لئے سوال ۲۱ میں رکھو لا = π (۲) اور (۳) باسانی حاصل ہوتے ہیں (ملاحظہ ہو شق ۱۲، سوال ۳)
۲۳۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{2\pi}{12} = \dots - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \text{لا} \quad (۱)$$

$$\frac{2\pi}{4} = \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \text{لا} \quad (۲)$$

$$\frac{2\pi}{8} = \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \text{لا} \quad (۳)$$

$$\frac{2\pi}{12} =$$

(۳) حاصل کرنے کے لئے رکھو سس طہ = لا اور یاد رہے کہ یہاں لا کوک لا ہے۔

(شق ۱۲ سوال ۱۰ حصہ اول)

۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{2\pi}{12} = \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \text{لا} \quad (۱)$$

$$\frac{2\pi}{8} = \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \text{لا} \quad (۲)$$

$$\pi \geq \text{لا} \geq 0 \quad (۲) \text{ میں}$$

۲۵۔ ثابت کرو کہ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے

$$\frac{1}{\pi} \text{ کججم (لاجم طہ) فرطہ} = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12 \times 12} - \frac{1}{12 \times 12 \times 12} + \dots \quad (۱)$$

$$\frac{\pi}{2} = \text{لوک} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \text{ اگر } 1 <$$

$$(۳) \text{ مگر جب رلا لوک } (1-2) \text{ جم رلا } (1+2) \text{ فرلا} = \frac{\pi}{2} \text{ اگر } 1 >$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ اگر } 1 <$$

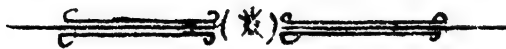
$$(۴) \text{ مگر جب لاجب رلا فرلا} = \frac{\pi}{2} \text{ اگر } 1 >$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ اگر } 1 <$$

$$۳۔ \text{ ثبات کرو کہ (۱) مگر جب لاجب رلا فرلا} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5} + \dots$$

$$(۲) \text{ مگر لاجب فرلا} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

(۲) حاصل کرنے کے لئے لاجب کو اس شکل میں رکھو اور پھیلاؤ۔



باب پنجم

ٹیکر کا مسئلہ ویا زیادہ تغیر کے تفاعلوں کی صورت میں۔ اس مسئلہ استعمال

۴۸۔ دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے سٹیر کا مسئلہ۔ ایک سے زیادہ

متغیروں کی صورت میں اب ہم مختصر طور پر ایسے پھیلاؤ حاصل کریں گے جو ٹیلے کے مسئلہ کے جواب ہیں۔ باقیات کے لئے جملے مجید ہیں، انہیں نہیں لکھا جائیگا اگرچہ انکی شکل کا اندازہ سلک ثبوت سے آسانی ہو سیکے گا۔ اگر ہم باقیوں کی کوئی مناسب بحث اسجگہ اختیار کریں تو ہم یہ صورتوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہم چلے جائیں گے۔ یہاں یہ تسلیم کر لیا جائے گا کہ تفاعل اور ان کے تمام شقوق جو باقی تک اور باقی میں شریک ہوتے ہیں وہ سب کے سب سلسل ہیں۔

شریک ہونے ہیں وہ سب بے سبب سبب ہیں۔
 سب سے پہلے ہم ف (لا+ہ) (ما+ک) کا پھیلاؤ ھ اور ک کی قوتوں
 میں حاصل کر چکے ہیں۔ سیلاؤ دفعہ ۴۳ کے ضابطہ (۱۳) کا جواب ہے۔

ف (لا+ہ+ما+ک) تفاعل ف (لا+ہ+ت+ما+ک+ت) کی قیمت بحکمکت = ۱
اب اگر ف (لا+ہ+ت+ما+ک+ت) کو ت کا تفاعل خیال کیا جائے تو اسے

ہم مکمل دن کے سلسلہ سے پھیلا سکتے ہیں۔ اختصار کی خاطر
ف (لا + ہ ت + م + ک ت) کو ف (ت) سے تعبیر کرو اور اسکے اشتقاق
کو زبروں سے بیان کرو۔ تب

فَا تَ فَا رَ + تَ فَا رَ + تَ فَا رَ + ... حَبِي (ت) + ... (۱)

اب ہم یہ دیکھنے کے فائرت) کے ت، مشتق، لا، ما کے لحاظ سے فائرت) کے جزوی مشتقوں میں کس طرح بیان ہو سکتے ہیں۔

$$(۲) \quad \text{رکھو لا + ہ ت = عہ، ما + ک ت = بہ} \dots\dots\dots (۲)$$

$$\text{تب فائرت) = جف فا ر عہ + جف فا ر بہ} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عہ}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف بہ}} = \text{ہ جف فا}$$

$$(۳) \quad \text{ک جف فا} + \dots\dots\dots (۳)$$

$$\text{لیکن جف فا} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عہ}} \times \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف عہ}} \times \frac{\text{جف عہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = ۱ \text{ اور اسی طرح } \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف بہ}}$$

اس طرح رشتہ (۳) ہو جاتا ہے

$$(۴) \quad \text{فائرت) = ہ جف فا} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} \dots\dots\dots (۴)$$

رابطہ (۴) کا مطلب شاید ابھی طرح سمجھ میں آئیگا اگر کسی خاص صورت پر غور کیا جائے

مثلاً فائرت) = (لا + ہ ت) (ما + ک ت)۔ اس جملہ کے ساتھ اوپر کا سلوک کرنے

سے فائرت) معلوم کیا جائے، اس طرح معلوم ہو گا کہ فائرت) بھی لا + ہ ت اور ما + ک ت کا تفاعل ہے اور اس لئے فائرت) حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

$$\text{اب فائرت) تفاعل فائرت) کا ت مشتق ہے اور (۴) میں فائرت) کی بجائے فائرت) رکھنے سے حاصل ہو سکیگا۔ پس}$$

$$\text{فائرت) = ہ جف فا} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}$$

ف (لا + ہ، ما + ک) کا پھیلاؤ حاصل کرنے کے لئے (۷) میں ت کی بجائے ایک رکھو

ف (لا + ہ، ما + ک) = ف (لا + ما) + ہ جف لا + ک جف ف + ک جف ف
جف ما

+ $\frac{1}{2}$ (ہ جف ف + ۲ ہ ک جف ف + ک جف ف) + ک جف ف + ک جف ف
جف لا جف ما جف ما

+ (۸)

(۸) سے مطلوبہ پھیلاؤ حاصل ہوتا ہے، پھیلاؤ (۷) بھی نہایت کارآمد ہے۔

فأ (ت) ، فأ (ت) کی جویمتیں (۵) اور (۶) میں لکھی گئی ہیں وہ رموز

کے پیرایہ میں زیادہ منضبط شکل میں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

(ہ جف لا + ک جف ف) فأ (ہ جف لا + ک جف ف) فأ (۹)

بشرطیکہ ان کا یہ مفہوم ہمارے پیش نظر رہے، مفہوم۔

جملہ نامائی کو پھیلا یا جائے گویا ہ جف لا اور ک جف ف مفرد مقدار میں

ہیں، پھیلاؤ کے بعد ہر رقم کے ساتھ آخر میں فاکو بطور جزو ضربی کے لکھا جائے

پھر اس طرح کی رقم ۳ (ہ جف لا + ک جف ف) فأ کی بجائے

پہلے ۳ ہ ک جف ف فأ پھر ۳ ہ ک جف ف فأ لکھا جائے

اس ترقیم کے موافق (۷) میں (۴ + ۱) دیں رقم ہوگی

ت $\frac{1}{2}$ (ہ جف لا + ک جف ف) فأ

$$= \frac{1}{12} (1\text{ جف}^2\text{ف} + 2\text{ جف}^2\text{ف} - 1\text{ جف}^2\text{ف} + \dots + \text{جف}^2\text{ف})$$

$$+ \dots + \frac{1}{12} (2\text{ جف}^2\text{ف} + \dots + \text{جف}^2\text{ف})$$

شکل (۸) میں لا کی بجائے ھ اور ما کی بجائے ک رکھنے سے
ف (لا + ھ، ما + ک) کا پھیلاؤ لا، ما کی توتوں میں حاصل ہو سکتا
ہے، لاحقوں والی ترقیم استعمال کرنے سے

$$\text{ف (لا + ھ، ما + ک)} = \text{ف (ھ، ک)} + \text{لا ف} + \text{ما ف}$$

$$+ \frac{1}{12} (\text{لا ف} + 2\text{ لا ما ف} + \text{ما ف}) + \dots + (10)$$

ف، ف مرتب کرنے کے لئے ہیں ف (لا، ما) کو بلحاظ لا اور ما
کے تفرق کرنا چاہئے اور پھر لا کی بجائے ھ اور ما کی بجائے ک رکھنا چاہئے

(۱۰) میں اگر ہم جاہیں تو رکھ سکتے ہیں ھ = .، ک = .، اس طرح ہیں

ف (لا، ما) نما پھیلاؤ سکالرین کے مسئلہ کے جواب میں ملے گا۔
اگر متغیر تین یا زیادہ ہوں تو پھیلاؤ اسی شکل کے ہونگے جو اوپر حاصل ہوئے،
مثلاً تین متغیروں کی صورت میں

$$\text{ف (لا + ھ، ما + ک، می + ل)} = \text{ف (لا، ما، می)} + \text{جف}^2\text{ف}$$

$$+ \frac{1}{12} (\text{جف}^2\text{ف} + \text{جف}^2\text{ف} + \text{جف}^2\text{ف} + \dots + \text{جف}^2\text{ف})$$

$$+ \frac{1}{12} (\text{جف}^2\text{ف} + \dots + \text{جف}^2\text{ف})$$

جہاں رموزی جملات کی تعبیر وہی ہے جو اوپر بیان ہوئی۔

۴۹۔ مثالیں (۱) سطح ف (لا، ما، ہی) =۔ کے نقطہ
 ن (ھ، گ، ل) پر ماسی ستوی سطح کی مساوات معلوم کرو۔
 ن میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساواتیں جسکی جیوب التمام
 لا، ما، نہ ہوں یہ ہیں

$$(۱) \quad \frac{لا-ھ}{لا} = \frac{ما-گ}{ما} = \frac{ہی-ل}{ہی} = \frac{ر}{ر}$$

جہاں ر فاصلہ ہے (لا، ما، ہی) کا (ھ، گ، ل) سے۔ فرض کرو کہ
 (لا، ما، ہی) سطح پر کا نقطہ ق ہے۔ تب لا = ھ + لا، ر
 ما = گ + ما، ہی = ل + نہ، ر، ف (لا، ما، ہی) =
 ف (لا، ما، ہی) =۔ میں لا، ما، ہی کی بجائے اوپر کی قیمتیں مندرج
 کرنے اور ٹیکلر کے مسئلہ سے پھیلانے سے

$$= ۰ \quad ف (ھ، گ، ل) + ر (لا، ف) + ما، ف + نہ، ف$$

+ ط، ر + (۲)
 لیکن ف (ھ، گ، ل) =۔ کیونکہ ف سطح پر واقع ہے، اس لئے
 ر کی ایک قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے صفر ہے، (۲) کی باقی اہلیں
 نقطہ ف سے ان فاصلوں کو تعبیر کرتی ہیں جہاں خط (۱) سطح سے ملتا ہے۔
 فرض کرو کہ ہ = ف ق تب چونکہ ر صفر نہیں ہے، اس لئے مساوات
 (۲) ہو جاتی ہے

$$= ۰ \quad لا، ف + ما، ف + نہ، ف + ط، ر + (۳)$$

جیسے ہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے خط (۱) ماس کا محل اختیار کرتا ہے،
 لیکن (۳) سے ظاہر ہے کہ جیسے ہ صفر ہوتا ہے لا، ف + ما، ف + نہ، ف
 بھی صفر ہوتا ہے۔

پس معلوم ہوا کہ خط (۱) مماسی خط ہو گا اگر لہذا 'صہ'، 'نہ' اس مساوات کو پورا کریں

کاف + مہ ف + نہ ف = (۴)

اگر ہم مساواتوں (۱) اور (۳) سے لہذا، صفا کو ساقط کر دیں تو ہمیں مساوات یلگی جو ت میں سے گذرنے والے کسی مماسی خط کے کسی نقطہ کے محدودوں کے لئے درست ہوگی، ان مقداروں کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا

(لا-ھ) ف + (ما-ک) ف + (حی-لی) ف =

یہ وہی مساوات ہے جو دفعہ ۹ حصہ اول میں معلوم کی گئی، صرف ترتیب کا فرق ہے۔
مثال ۲۔ متجانس تفاضلوں کے لئے آئٹمز کا مسئلہ۔

تعریف - اگر دو یا زیادہ متغیروں کا تفاعل ایسا ہو کہ متغیروں لا، ما، ... کی بجائے بالترتیب لا، لا، لا، ما، ... لگتے سے تفاعل لا، لا، لا، ما، ... خواہ مقدار لا، کچھ ہی ہو تو لا، کوں، دیں درجہ کا متجاس تفاعل کہتے ہیں۔
فرض کرو کہ لا = ف (لا، ما) دو متغیروں لا، ما میں ت، دیں درجہ کا متجاس تفاعل ہے، تب ہم ثابت کر چکے کہ

لا $\frac{1}{2}$ + ما $\frac{1}{4}$ + می $\frac{1}{4}$ = ن (۱)

$$(1) \dots \dots \dots (n-1) \dots \dots \dots (n) = \dots \dots \dots + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

لا، ما کی بجائے (ا+ت) لا، (ا+ت) ما یعنی لا+ت لا،
ما+ت ما رکھو اس طرح ہی ہو جائے گا (ا+ت) پس

ف (لا + ت لا) = (ما + ت ما) = (ا + ت) ت
 دائیں جانب کے تفاعل کو ٹیلر کے مسئلہ سے اور بائیں جانب کے تفاعل کو سنڈ شنائی سے پھیلانے سے حاصل ہوگا

کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہوں۔ ف (ا، ب) قیمت اقل ہوگی ف (لا، ما)
کی اگر ف (ا، ہ + ب + ک) بڑا ہو ف (ا، ب) سے ھ، گ
کی تمام ایسی قیمتوں کے لئے۔

دو سے زیادہ متغیروں والے تفاعلوں کے لئے ایسی ہی تعریفیں صا
آتی ہے۔ متغیر متبوع کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے ہم مان لینے کہ تفاعل
اور لن کے مشتق مسلسل ہیں۔

ف (ا، ب) کے اعظم یا اقل ہونے کے لئے (یعنی موڑ پر کی قیمت ہو
لئے) ضروری ہے کہ دو ف (ا، ب) اور ف (ا، ب) صفر ہوں جبکہ

لا = ا، ما = ب کیونکہ ف (ا، ب) ف (لا، ما) کے موڑ کی قیمت

نہیں ہو سکتی جب تک کہ یہ صرف لا کے تفاعل ف (لا، ب) کے
موڑ کی قیمت نہ ہو جبکہ لا = ا اور نیز جب تک کہ یہ صرف ما کے تفاعل
ف (ا، ما) کے موڑ کی قیمت نہ ہو جبکہ ما = ب۔ اس لئے ف (لا، ب)

کو لازماً صفر ہونا چاہئے جبکہ لا = ا اور ف (ا، ما) کو صفر ہونا چاہئے

جبکہ ما = ب۔

موڑ کی قیمت کے لئے اوپر کی شرط ضروری ہے۔ کافی شرط معلوم

کرنے کے لئے ف (ا، ہ + ب + ک) کو پھیلاؤ، اس طرح حاصل ہوگا

ف (ا، ہ + ب + ک)۔ ف (ا، ب)

$$= \frac{1}{4} (ھ + ف + ۲ھک + ف + ک + ف + ب)$$

..... (۱)

جہاں ھ، ف، گ، ب کو حذف کر دیا گیا ہے کیونکہ ف = ۰، ف = ۰۔

اگر ف (ا، ب) موڑ کی قیمت ہو۔

اگر ف (ا، ب) سوڑ کی قیمت ہو تو (ا) کے پائیں جانب کے جملہ کو ہ اور گ کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لئے وہی علامت قائم رکھنی چاہئے، اگر ف (ا، ب) قیمت اعظم ہو تو یہ علامت منفی ہونی چاہئے اگر یہ اقل ہو تو مثبت۔ جب میں ہ اور گ کی تیسری قیمتیں شریک ہونی ہیں جبکہ ب کو ٹیلر کے مسئلہ کا باقی خیال کیا جائے، اس لئے ایک حد تک یہ عیاں معلوم ہوتا ہے کہ ہ اور گ کی کافی طور پر چھوٹی قیمتوں کے لئے پائیں جانب کے جملہ کی علامت ہ گ کے دو درجہ جملہ کی علامت سے متعین ہوگی۔ لیکن یہ مفروضہ پورے طور پر درست نہیں تسلیم کر لیا جاسکتا جیسا کہ ذیل کی مثال سے واضح ہوگا جسے پیاؤنے وضع کیا۔

فرض کر دو کہ ف (لا، ما) = ۸ لا - ۶ لا ما + ما

تب ۱ = ۱، ۲ = ۱، ۳ = ۱، ف (ا، ب) = ۰ اور مساوات (۱) ہو جاتی ہے

ف (ہ، گ) = ۸ ہ + (-۶ ہ گ + گ) (۲)

یہاں ٹیک جب = (-۶ ہ گ + گ)

درجہ دوم کی قیمتیں ۸ ہ میں شمول ہو جاتی ہیں اور یہ مثبت ہے جب تک کہ ہ صفر نہ ہو، لیکن ہ گ کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لئے ف (ہ، گ) کی ایک ہی علامت نہیں ہے کیونکہ فرض کر دو کہ گ = ۱۰ ہ تب

ف (ہ، گ) = (۱۰ - ۶) لا - ۴ لا

اس لئے ف (ہ، گ) منفی یا مثبت ہوگا بموجب اس کے کہ لا ۲ اور ۴ کے درمیان

واقع ہو یا نہ ہو۔ دوسرے الفاظ میں ف (۱۰ - ۶) متبادل ف (لا، ما) کی اقل قیمت

نہیں ہو سکتی خواہ دوسرے درجہ کی قیمتیں مثبت ہی کیوں نہ ہوں جب تک کہ ہ صفر نہ ہو تو

اوپر جو شکل پیدا ہوئی ہے اسکی تحقیق کے لئے ٹیلر کے مسئلہ میں باقی کے مزید معائنہ

کی ضرورت ہوگی، یہ ہماری کتاب کے حدود سے باہر ہے، یہیں اس جگہ صرف

اتنا بیان کر دینا کافی ہوگا کہ ف (ا، ب) سوڑ کی قیمت ہوگی اگر

ف (ب) < ف (ا)

اور یہ قیمت، اعظم ہوگی اگر ف (یا ج) منفی ہو اور اقل ہوگی اگر

ف (یا ج) مثبت ہو۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اس امر کے لئے ضروری شرط کہ ف (یا ج) تفاعل
ف (لا، ما، می) کے موڑ کی قیمت ہو یہ ہے، ف، ف، ج میں
ہر ایک کو صفر ہونا چاہئے جبکہ لا = ا، ما = ب، می = ج

کئی صورتوں میں یہ پہلے سے معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل کے موڑ کی قیمت کا لانا
وجود ہے، اور بالعموم اسے بغیر فرید ثبوت کے مان لیا جاتا ہے کہ متغیروں کی وہ
قیمتیں جو تفاعل کے پہلے مشتقوں کو صفر بنادیں ان سے تفاعل کے موڑ کی
قیمت معلوم ہوتی ہے۔

۵۱۔ اس سلسلہ کی شہور صورتیں وہ ہیں جن میں تفاعل کے موڑ کی قیمتیں مطلوب
ہوں دو تین یا زیادہ متغیروں کا تفاعل ہو اور متغیر خود ایک یا دو شرطی مساواتوں
کے ذریعہ مربوط ہوں۔ ایسی صورتوں میں مناسب طرز عمل بالعموم یہ ہوگا۔ فرض
کرو کہ تفاعل (مثلاً) چار متغیروں کا تفاعل ہے اور چار متغیروں میں دو شرطی
رابطہ معلوم ہیں۔

۱ = ف (لا، ما، می، ہ) (۱)

ف (لا، ما، می، ہ) = (۲) مسا (لا، ما، می، ہ) = (۳)
تھوڑی دیر کے لئے فرض کرو کہ می اور ہ مساواتوں (۲) اور (۳) سے
لا، ما کی رقوم میں معلوم کر لئے گئے ہیں اور ان قیمتوں کو می، ہ کی بجائے
(۱) میں مندرج کر دیا گیا ہے، اس طرح ۵ دو متبور متغیروں لا، ما کا تفاعل

بن جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ع، ع، ع، ع تفاعل کے پہلے مشتق ہیں
اس مفروض کی بنا پر کہ اوپر کی قیمتیں مندرج کر دی گئی ہیں موڑ کی قیمت کے لئے

عَفْ، عَفْ، عَفْ، دونوں صفر ہونگے۔ اب

عق = ف + ف جفای + ف جفاه ... (۱۲)

اور جفی جفی، جفی جفی
جفی جفی، جفی جفی
سے حاصل ہوئے ہیں

$$(5) \dots\dots\dots = \frac{\text{جفای}}{\text{جفای}} + \frac{\text{جفای}}{\text{جفای}} + \dots\dots\dots$$
$$\frac{\text{سیا}}{\text{جف}} + \frac{\text{جفی}}{\text{جف}} + \frac{\text{سیا}}{\text{جف}} = \dots\dots\dots (6)$$

(۵) اور (۶) کو جف ہی ، جف ہ کے لئے حل کرنے کی بجائے
جف لا جف لا
 (۵) کو لہا سے (۶) کو مہا سے ضرب دو اور (۴) کے ساتھ جمع کرو، اس طرح
 حاصل ہوگا

عف = ف + لا + فہ + مہ + سہ + (فی + لا + فہ + مہ + سہ) + جفی

$$+ (ف + ل + ف + م + س) \frac{\text{جف}}{\text{جف}} \dots (4)$$

اسی طرح کے عمل سے حاصل ہوگا

عَفْ = ف + لَ + فِه + مَ + سِ + (ف + لَ + فِه + مَ + سِ) $\frac{\text{جَفْ حِ}}{\text{جَفْ مَ}}$

..... (۸) + (ف + ل + ف + م + س) $\frac{\text{جفاہ}}{\text{جت ما}}$

اب (۷) میں جف لا جف لا جف ھ کے سر (۸) میں جف ہی اور جف ما جف ھ کے سروں کے بالترتیب مساوی ہیں، ہم لہ، مہ کی قیمتیں اس طرح منتخب کرتے ہیں کہ یہ سر صفر ہوں (اور یہ بالعموم ممکن ہوگا)۔ ایسا کرنے سے عفا و عفا کے لئے جو جملے ہیں ان میں صرف پہلی تین رقمیں رہ جاتی ہیں۔

د کے سوڑ کی قیمتوں کے لئے عفا و عفا و صفر ہوں گے، اس لئے سوڑ کی قیمتوں کے لئے ذیل کی چار مساواتیں درست ہوں گی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ف} + \text{لہ} + \text{فہ} + \text{مہ} = \text{سپا} = \text{۔} \\ \text{ف} + \text{لہ} + \text{فہ} + \text{مہ} = \text{سپا} = \text{۔} \\ \text{فہ} + \text{لہ} + \text{فہ} + \text{مہ} = \text{سپا} = \text{۔} \\ \text{ف} + \text{لہ} + \text{فہ} + \text{مہ} = \text{سپا} = \text{۔} \end{array} \right. \quad (۹) \dots\dots\dots$$

یہ چار مساواتیں (۲) اور (۳) کے ساتھ ملکر لہ اور مہ معلوم کرنے کے لئے نیز لا، فا، ہی، ھ کی وہ قیمتیں معلوم کرنے کے لئے جن سے د کے سوڑ کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں عین کافی ہوں گی۔

مساواتیں (۹)، لا، فا، ہی، ھ میں متشاکل ہیں اور یہ طریقہ خاص طور پر سوزوں ہوتا ہے جبکہ ف، فہ، مہ متجانس ہوں، یہ غیر معین ضاربوں کا طریقہ کہلاتا ہے۔ اوپر ہم نے صرف چار شیخ اور دو شرطی مساواتیں لی ہیں ظاہر ہے کہ استدلال بالکل عام ہے۔ مساواتیں (۹) آسانی اس قاعدہ سے لکھی جاسکتی ہیں۔ مرتب کرو

فرف + لہا + فرقا + مہا + فرسا۔ اور فرلا، فرما، فری، فرہ کے سروں کو صفر کے مساوی لکھو۔

حرف سے مراد ف، فرلا، ف، فرما، فی، فری + ف، فرہ ہے ایسا ہی فرقا اور فرسا کا مفہوم ہے۔

مثال ۱۔ $s = لا + ما + می (۱)$ ، فقا = لا + ب + ما + ج ی۔ ک = (۲)

صحیحاً، کی کم سے کم قیمت کا وجود ہے کیونکہ لازماً مثبت ہے اور (۲) کی بنا پر لا، ما، می ایک ساتھ صفر نہیں ہو سکتے۔ اب

$s + لہا + فرقا = (۲ لا + لہا) + فرلا + (۲ ما + لہا + ب) + فرما + (۲ می + لہا + ج) + فری$
فرلا، فرما، فری کے سر صفر کرنے سے لا، ما، می کی وہ قیمتیں جن کے لئے s اقل ہے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\frac{لا}{۱} = - = \frac{لہا}{۲} = \frac{ما}{ب} = \frac{می}{ج}$$

(۲) کی رو سے ان میں سے ہر کسر = $\frac{ک}{لا + ب + ج}$

طالب علم اس مثال کو اس طرح سے بھی حل کر سکتا ہے کہ (۲) سے

جو می کی قیمت (ک۔ لا۔ ب۔ ما) حاصل ہوتی ہے اسکو (۱) میں

پہلے درج کر لیا جائے، لیکن اس طریقہ سے جو s کی قیمت معلوم ہوگی اسکو پہلے طریقہ کے s کے ساتھ مقبض نہ کیا جائے۔
مثال ۲۔ s کے سوڑ کی قیمتیں معلوم کرو

$$s = لا + ب + ما + ج می \dots \dots (۱)$$

$$\text{لا} + \text{ما} + \text{ہی} = ۱ \dots\dots\dots (۲)$$

اس صورت میں، صرف ایک متغیر کا تفاعل ہے، غیر معین ضاربوں کا قافہ لگ سکتا ہے۔ جزو ضربی ۲ کو نکلانے کے لئے ضارب لہ اور ۲ حاصل ہوگا، اس طرح حاصل ہوگا،

$$\text{لا} + \text{لہ} + \text{ما} + \text{لہ} + \text{ما} + \text{ہی} = ۰ \dots\dots\dots \text{ج ہی} + \text{لہ ہی}$$

$$+ \text{ما} + \text{ن ہی} = ۰ \dots\dots\dots (۳)$$

ساداتوں (۴) میں سے پہلی کو لا سے، دوسری کو ما سے، تیسری کو ہی سے ضرب دو اور جمع کرو۔

ساداتوں (۲) اور (۳) کی مدد سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج ہی} + \text{لہ} = ۰ \dots\dots\dots \text{یعنی لہ} = ۰$$

جہاں، کی قیمت سوڑ کی قیمت ہے کیونکہ لا، ما، ہی کی قیمتیں جد (۴) سے ملتی ہیں ان سے، کی سوڑ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۴) میں لہ کے لئے، لکھو، اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{لا} = \frac{\text{ما}}{\text{لہ}}، \text{ما} = \frac{\text{ما}}{\text{لہ}}، \text{ہی} = \frac{\text{ما}}{\text{لہ}}$$

اب اگر لا، ما، ہی کی قیمتیں (۳) میں رکھی جائیں تو جزو ضربی ما نکل جائیگا اور، میں یہ سادات درجہ دوم حاصل ہوں گی

$$\text{لا} + \text{ب} + \text{ما} + \text{ج ہی} = ۰ \dots\dots\dots (۵)$$

(۵) کی ایک اس کی قیمت اعظم ہوگی اور دوسری اقل۔

مشق ۱۴

۱۔ ذیل کے تجانس تفاعلوں کے متعلق آئسز کے مسئلہ کی تصدیق کرو (صوف پہلے مشتقوں کے لئے)

$$(۱) \text{ لا} + \text{ب} = \text{لا} + \text{ج} \text{ مآ} \quad (۲) \text{ لا} + \text{ب} = \text{مآ} + \text{ج} \text{ ی}$$

$$(۳) \text{ لا} + \text{لا} + \text{مآ} + \text{مآ} \text{ ی} \quad (۴) \frac{\text{لا} + \text{مآ}}{\text{لا} + \text{مآ}}$$

$$(۵) \frac{\text{لا} + \text{مآ} + \text{مآ}}{\text{لا} + \text{مآ} + \text{مآ}} \quad (۶) \text{ مس} (\text{مآ}) \text{ جہاں } = \text{لا} + \text{مآ} + \text{مآ}$$

$$(۷) \frac{1}{2}$$

۲۔ د، ن، دین درجہ کا تجانس تفاعل ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ لا} + \text{لا} + \text{مآ} = (ن - ۱) \text{ د}$$

$$(۲) \text{ لا} + \text{لا} + \text{مآ} = (ن - ۱) \text{ م}$$

۳۔ اگر ۱ مثبت ہو تو ثابت کرو کہ ۳ لا لا مآ۔ لا مآ اعظم ہے

جبکہ لا لا مآ = ۱ لیکن اگر لا لا مآ = ۰۔ تو نہ اقل ہے نہ اعظم۔
۴۔ تفاعل لا مآ (۶ - لا - مآ) اعظم ہے جبکہ لا مآ = ۳ مآ = ۲ لیکن نہ یہ اقل ہے نہ اعظم جب لا لا مآ = ۰۔

۵۔ اگر ۱ ب، ج مثبت ہوں اور اگر $\frac{1}{2} + \frac{ب}{مآ} + \frac{ج}{مآ} = ۱$ تو ثابت کرو کہ حاصل جمع لا + مآ + مآ اقل ہوگا جبکہ

کی اقل قیمت لا، ماک کی ان قیمتوں سے حاصل ہوتی ہے جو ذیل کی مساواتوں کو پورا کرتی ہیں

$$(ح\ ۱) لا + (ح\ ۱\ ب) ما + (ح\ ۱\ ج) = ۰$$

$$(ح\ ۲\ ب) لا + (ح\ ۲\ ب) ما + (ح\ ۲\ ج) = ۰$$

۱۱۔ ان نقاط معلومہ کا مرکز ہندسی وہ نقطہ ہے جس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ان نقاط سے کم سے کم ہو۔

۱۲۔ غیر معین ضاربوں کے قاعدہ سے قطع ناقص کے بیسیج کی مساوات دریافت کرو جبکہ بیسیج کو ناقص کے عمادوں کا لگاتار تصور کیا جائے۔

$$\text{عمادہ ہے } \frac{لا}{ع\ ۱} - \frac{ب\ ۱\ ما}{ب\ ۱} = لا - ب\ ۱$$

$$\text{جہاں } \frac{ع\ ۱}{ب\ ۱} + \frac{ب\ ۱}{ب\ ۲} = ۱$$

$$\text{اس لئے } \frac{لا}{ع\ ۱} + لا = \frac{ع\ ۲}{ب\ ۲}، \frac{ب\ ۱\ ما}{ب\ ۱} + لا = \frac{ع\ ۲}{ب\ ۲}$$

$$\text{اس لئے } لا = \frac{۱}{۲} (لا - ب\ ۱) ع\ ۱ = \frac{لا}{ب\ ۲} لا - ب\ ۱، \text{ وغیرہ۔}$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ لا ع\ ۱ + ما ب\ ۱ = لا کا لگاتار جہاں ع\ ۱ + ب\ ۱ = ب\ ۲

$$لا + ما = \frac{لا + ۱}{ب\ ۱} (لا - ب\ ۱) = ۰$$

۵۲۔ غیر معین صوتیں۔ ممکن ہے کہ کوئی تفاعل ف (لا) جسکی

تقسیم و جریا دلیل کی قیمتوں کی کسی سمت کے اندر عام طور پر بخوبی ہوتی ہو

و جب کسی خاص قیمت ۱ کے لئے ایسی شکل اختیار کرے (جیسے صفر) جو بے معنی ہو۔ لیکن ایسا ہو سکتا ہے کہ جب 'لا' مائل بہ ۱ ہو تو ف (۱) کی ایک معین انتہا حاصل ہو۔ ف (۱) کی قیمت لا = ۱ کے لئے دراصل غیر معین ہے یعنی اس کی قیمت جبر و مقابلہ کے معمولی قاعدوں سے محسوب نہیں ہو سکتی تاہم یہ عام رواج ہو گیا ہے کہ ایسی حالت میں ف (۱) کو غیر معین صورت کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور تعریف کے طور پر انتہا ۱ کو ف (۱) کی قیمت خیال کرتے ہیں جبکہ لا = ۱۔ تعادل کی اس قیمت کو جو تعریف کی بنا پر انتہا کی گئی ہے ہم ف (۱) کی "اصلی قیمت" کہتے ہیں جبکہ لا = ۱۔

یاور ہے کہ یہ "اصلی قیمت" تعریف کی بنا پر لی گئی ہے اور اس لئے بالکل اختیاری ہے۔ لیکن اس طرز عمل میں ایک خاص فائدہ ہے اس طرح ف (۱) جو عام طور پر قیمت ۱ تک مسلسل ہو بشمول قیمت ۱ کے مسلسل بن جاتا ہے۔

غیر معین صورتیں عام طور پر حسب ذیل ہیں:-

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}, \infty, \infty \times 0, \infty, \infty, \infty$$

ایسی صورتوں میں سے بعض پہلے آئی ہیں، خود ف (۱) کا مشتق بصورت صفر ہے۔ لا لوک لا میں جبکہ لا = ۰ صورت $\infty \times 0$ پائی جاتی ہے، اصلی قیمت صفر ہے۔

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ یا } \frac{\infty}{\infty} \text{ سے جبکہ لا = ۰ + } \infty \text{ ملتا ہے } \infty \times 0 \text{ یا } \frac{\infty}{\infty}$$

اور انتہا صفر ہے [ملاحظہ ہو مشتق، سوالات ۸، ۹ حصہ اول] یہ دیکھنا مشکل نہیں کہ نتیجہ درست رہتا ہے خواہ ف صحیح یا کسور ہو۔

صورت ۱ پیدا ہوتی ہے جبکہ لا = ۰، (۱ + لا) لا میں، انتہایا اصلی قیمت

قوے (دفعہ ۴۸ نتیجہ صریح، حصہ اول) اکثر سوالوں میں یہ انتہائیں محض جبریہ استحالوں اور سلسلوں کے استعمال سے حاصل ہو سکتی ہیں، عام مسائل کا سرسری ذکر کرنے سے پہلے ہم اس طرح کی چند مثالیں حل کریں گے۔

مثال ۱۔ $\frac{لا - ۱ + (لا - ۱)^۲}{(لا - ۱)^۲ - لا + ۱}$ جبکہ لا = ۱، صورت صفر

شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں کو (لا - ۱) پر تقسیم کرو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ انتہا ۳ ہے، اسلئے کسی "اصلی قیمت" جبکہ لا = ۱، ۲ ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{(جب لا - لا)}{لا}$ جبکہ لا = ۱، صورت صفر

جب لا کو پھیلاؤ (= لا + $\frac{لا}{۲} + \dots$)، شمار کنندہ سے لا خارج ہو جاتا ہے اور شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں کو لا پر تقسیم کرنے سے انتہا ۱ حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ $\frac{قط لا}{قط لا}$ جبکہ لا = $\frac{۱۱}{۲}$ ، صورت $\frac{\infty}{\infty}$

فرض کرو کہ لا = $\frac{۱۱}{۲}$ ، تب

نہا $\frac{قط لا}{قط لا} = \frac{نہا}{قط لا} = \frac{جب ۳}{جب ۲} = ۳ -$

مثال ۴۔ $\frac{۱}{لا} - مم لا$ جبکہ لا = ∞ ، شکل $\infty - \infty$

فرض کرو کہ لا = $\frac{۲}{۳}$ - تب

$$\frac{نہا}{لا} = \frac{نہا}{\frac{۲}{۳}} = \frac{نہا \times ۳}{۲} = \frac{۳}{۲} \text{ جب } ۳ = ۳$$

مثال ۴- $\frac{۱}{لا} - مم لا$ جبکہ لا = ۰، شکل $\infty - \infty$

$$\frac{۱}{لا} - مم لا = (۱ + \frac{لا}{جم لا}) (جم لا) (جب لا لا) (جم لا لا)$$

پہلے جزو ضربی کی انتہا ۲ ہے اور دوسرے کی ۱، نیز

$$جب لا - لا جم لا = لا - \frac{لا}{۴} + \dots - لا (۱ - \frac{لا}{۲} + \dots)$$

$$= \frac{لا}{۳} + \dots$$

یعنی تیسرے جزو ضربی کی انتہا $\frac{۱}{۳}$ ہے، پس مطلوبہ انتہا یا اصلی قیمت $\frac{۲}{۳}$ ہے

مثال ۵- لا جبکہ لا = ۰، صورت :

فرض کرو کہ لا = ۰، تب لوک لا = لا لوک لا، کی انتہا صفر ہے، پس لا یا لا کی انتہا ایک ہے۔

مثال ۶- $(\frac{۱}{لا})$ جس لا جبکہ لا = ۰، صورت ∞

تفاعل کا لوکارقم ہے مس لا لوک لا = - $\frac{مس لا}{لا} \times (لا لوک لا)$

جس کی انتہا صفر ہے، اسلئے تفاعل کی انتہا ۱ ہے۔

۵۳- احصائی طریقہ - غیر معین صورتوں کی تحقیق کے متعلق

اب ہم عام مسئلہ بیان کرتے ہیں۔ ایسی نازک قیمتوں کے قرب میں ہم تفاعل

تسلسل تسلیم کر لینگے۔

مسئلہ۔ اگر فہ (۱) اور سہا (۱) دونوں صفر ہوں یا دونوں لاتنا ہی اور

اگر فہ (۱) سہا (۱) ایک انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا (۱) کی طرف مائل ہو

تو فہ (۱) سہا (۱) بھی اسی انتہا کی طرف مائل ہوگا۔

تکرار سے بچنے کے لئے ابتدائیں ہی ہم اس امر کا ذکر کر دیتے ہیں کہ اگر فہ (۱) سہا (۱)

کی صورت غیر معین ہو جبکہ لا = ۱ تو مسئلہ بالا سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر فہ (۱) سہا (۱) ایک انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا (۱) کی طرف مائل ہو تو فہ (۱) اور سہا (۱)

فہ (۱) سہا (۱) بھی اسی انتہا کی طرف مائل ہوگا، وغیرہ وغیرہ۔

دفعہ ۲، حصہ اول کے مسئلہ اوسط قیمت کی صورت ذیل کو ہم استعمال کرینگے۔
یہ شکل اس مسئلہ کی توسیع ہے۔

اگر فہ (۱) فہ (۱) سہا (۱) سہا (۱) سلسل ہوں سعت

۱ ≥ لا ≥ ب کے لئے اور اگر سہا (۱) صفر نہ ہو جبکہ

۱ > لا > ب تو

$$\frac{\text{فہ (ب) - فہ (۱)}}{\text{سہا (ب) - سہا (۱)}} = \frac{\text{فہ (۱)}}{\text{سہا (۱)}} \dots \dots \dots (۱)$$

جہاں ۱ > لا > ب [اوسط قیمت کے مسئلہ کی تقسیم شدہ صورت]

اس کا ثبوت آسان ہے، فرض کرو کہ [ملاحظہ ہو دفعہ ۲، حصہ اول]

فار (لا) = $\frac{\text{فدا (ب) - فدا (ا)}}{\text{سدا (ب) - سدا (ا)}}$ {سا (لا) - سدا (ا)} - {فدا (لا) - فدا (ا)}
 اب فار (ا) = ۰، فار (ب) = ۰ اس لئے فار (لا) = ۰، ہم سدا (لا)
 پر تقسیم کر سکتے ہیں کیونکہ سدا (لا) صفر نہیں ہے جب تک کہ لا، ا اور ب
 کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

(۱) صورت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ - فرض کرو کہ فدا (ا) = ۰، سدا (ا) = ۰،

(ا) میں رکھو ب کی بجائے لا۔ تب

$$\frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} = \frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} \quad (ا > لا > لا)$$

$$\text{ا اور نہ لا} = \frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} = \frac{\text{نہا}}{\text{لا اور سدا (لا)}} = \frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} = \frac{\text{نہا}}{\text{لا اور سدا (لا)}}$$

اگر ∞ تو لا کی بجائے ا ہی رکھنے سے سوال بد لگ رہا ہو جائیگا کہ
 اتہا معلوم کی جائے جبکہ ا ہی ∞ ، اس لئے اس صورت میں بھی مسئلہ
 درست رہتا ہے۔

(۲) صورت $\frac{\infty}{\infty}$ - (ا) پہلے فرض کرو کہ فدا (لا) سدا (لا)

دونوں مائل بہ لامتناہی ہوتے ہیں جبکہ لا مائل بہ لامتناہی ہو۔ فرض کرو کہ
 لا کی بہت بڑی مگر محدود قیمت ج ہے۔ (ا) میں ب کی بجائے لا اور
 لا کی بجائے ج رکھنے سے

$$\frac{\text{فدا (لا) - فدا (ج)}}{\text{سدا (لا) - سدا (ج)}} = \frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} \quad (ج > لا > لا) \dots (ع)$$

$$\frac{\text{فدا (ج)}}{\text{سدا (ج)}} - ۱ \times \frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} = \frac{\text{فدا (لا) - فدا (ج)}}{\text{سدا (لا) - سدا (ج)}} = \frac{\text{نہا}}{\text{لا اور سدا (لا)}}$$

سدا (لا)

اس لئے (ع) کی رو سے

$$\frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} = \frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} \times \frac{\text{سدا (لا)}}{\text{فدا (لا)}} = 1$$

اب ج کو اتنا بڑا لو کہ $\frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}}$ اور اسکی انتہا ۱ کا فرق بہ نسبت

صہ کے کم ہو۔ پھر ج کی یہ قیمت مقرر یا ثابت کر دو، اس طرح فدا (ج) اور سدا (ج) اگر یہ بڑے ہیں مگر محدود ہیں۔ اس کے بعد لا کو اتنا بڑا لو (اور ایسا ممکن ہے۔ کیونکہ فدا (لا) اور سدا (لا) دونوں مائل یہ لاتنا ہی ہوتے ہیں) کہ بائیں جانب کی دوسری کسر اور اکافرق مطلق صہ سے کم ہو

اب کسر $\frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}}$ دو ایسے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے

پہلے کا فرق ۱ سے کم ہے بہ نسبت صہ کے اور دوسرے کا فرق ۱ سے کم ہے بہ نسبت صہ کے اور صہ، صہ اتنے چھوٹے ہو سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔

اس لئے $\frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}}$ کی انتہا ۱ ہے یعنی

$$\frac{\text{سدا (لا)}}{\text{فدا (لا)}} = \frac{\text{سدا (لا)}}{\text{فدا (لا)}} \times \frac{\text{فدا (لا)}}{\text{سدا (لا)}} = 1$$

(ب) اسکے بعد فرض کر دو کہ فدا (۱) سدا (۱) دونوں مائل یہ لاتنا ہی

ہوتے ہیں اور ۱ محدود ہے۔ لا کی بجائے ۱ + $\frac{1}{n}$ رکھنے سے سدا

بالایہ رہ جاتا ہے کہ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ کے لئے انتہا معلوم کی جائے، پس اس صورت میں

بھی سبکدہ درست رہتا ہے۔

اوپر کا ثبوت (Gennochi-Peano) کے احصا سے اخذ کیا گیا ہے
(جرمن ترجمہ، لپینرگ، ٹیوبینر)

(۳) دیگر صورتیں اگر فدا (۱) = ۰، سا (۱) = ∞ تو ہم
لکھ سکتے ہیں

$$\text{فدا (۱)} \times \text{سا (۱)} = \text{فدا (۱)} \div \frac{1}{\text{سا (۱)}}$$

اس طرح یہ صورت صورت اول میں تبدیل ہو جاتی ہے۔
صورتیں : ∞، ∞، ∞، ∞ کو کارم لینے سے تحویل ہو جاتی ہیں ملاحظہ ہو دفعہ
۵۲ مثال ۶۵۔

صورت ∞ - ∞ کے لئے دفعہ ۵۲ مثال ۴ کی طرح عمل کیا جاسکتا ہے۔
یا سلسلوں میں پھیلانے سے مدد لی جاسکتی ہے۔ عمل تفرق کو سلسلوں میں
پھیلانے کے عمل کے ساتھ ملایا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ن مثبت ہو تو لوک $\frac{1}{\text{لا}}$ ماٹل : صفر ہوتا ہے جبکہ لا ماٹل :
لا تھا ہی ہو۔

$$\text{نہا } \frac{1}{\text{لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{لا}} = \frac{\frac{1}{\text{لا}}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}^2} = \frac{1}{\text{لا} \times \text{لا}}$$

مثال ۲۔ دو متبوع متغیروں کے تفاعل $\frac{\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}}$ کی انتہا لا ← اور ما ←۔

کے لئے معلوم کرو۔
”اصل قیمت“ کے متعلق جو تعریف ہم نے اوپر اختیار کی ہے اسکی اختیاری
نوعیت کی اس مثال سے توضیح ہوتی ہے، نیز اس مثال سے واضح ہو گا کہ ایک
متغیر کے تفاعل کی انتہا ماٹل اور دو متغیروں کے تفاعل کی انتہا ماٹل میں کس قدر فرق

اد پر کا تعامل کسی ایک قیمت کی طرف مائل کیا جاسکتا ہے،
رکھو ما = لا لا اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{لا - ۱}{لا + ۱} = \frac{لا - لا لا}{لا + لا لا}$$

لا کو مناسب قیمت دینے سے $\frac{لا}{لا + ۱}$ کسی عدد کے مساوی ہو سکتا ہے،
ہندسی نقطہ نظر سے، محورے سطح (ی) (لا + ما) = لا - ما پر واقع ہوتا ہے
اور جیسے لا اور ما صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں نقطہ (لا، ما، ی) محور
سے پر کے کسی نقطہ کے قریب لایا جاسکتا ہے۔

مشق ۱۵

سوالات ۱ تا ۱۵ میں وجہ کی معلومہ قیمتوں کے لئے تقاطعوں کی انتہائیں
("اصلی قیمتیں") دریافت کرو۔

$$۱- \{ لا - (ن + ۱) لا^{۱+۱} + ن لا^{۲+۱} \} / \{ (۱ - لا) لا^{۱+۱} \} جبکہ لا = ۱$$

$$۲- \{ ۱ - لا \} / \{ (۱ - لا) لا^{۱+۱} \} جبکہ لا = ۰$$

$$۳- لا - لا لا^{۱+۱} / (۱ - لا) جبکہ لا = \infty$$

$$۴- ن \{ (۱ + لا) (۱ + لا) \dots (۱ + لا) \} - لا جبکہ لا = \infty$$

رکھو لا = $\frac{۱}{ن}$ اور مسئلہ ثنائی سے پھیلاؤ۔

$$۵- (۱ + \frac{۱}{لا}) اور (۱ + \frac{۱}{لا}) جبکہ لا = \infty$$

- ۶- $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا} - ۱}$ اور $\frac{۱ - \text{لا} + \text{لوک لا}}{\text{لا} - ۱}$ جبکہ $\text{لا} = ۱$
- ۷- $\frac{\text{مس لا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{جب لا}}$ اور $\frac{\text{مس ن لا} - \text{ن س لا}}{\text{ن جب لا} - \text{جب ن لا}}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$
- ۸- $(\frac{۱۲}{۲} - \text{لا})$ مس لا اور لا مس لا - $\frac{۱۲}{۲}$ قط لا جبکہ $\text{لا} = \frac{۱۲}{۲}$
- ۹- $\frac{\text{لوک (۱+ لا)}}{\text{لوک (۱+ ب لا)}} / \frac{\text{لوک (۱+ ب لا)}}{\text{لوک (۱+ ب لا)}}$ اور $\frac{\text{لوک (۱+ ب لا)}}{\text{لوک (۱+ ب لا)}}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$
- ۱۰- $\frac{۱}{\text{لا}} - \frac{۱}{\text{لا}}$ لوک $(۱+ لا)$ جبکہ $\text{لا} = ۰$
- ۱۱- $(\frac{\text{لا} - \text{ب لا}}{\text{لا}}) / (\frac{\text{لا} - \text{ج لا}}{\text{لا}})$ جبکہ $\text{لا} = ۰$
- ۱۲- $\frac{\text{لوک مس لا}}{\text{لوک مس ب لا}}$ اور $\frac{\text{لوک مس لا} - \text{لوک مس ب لا}}{\text{لوک جب لا} - \text{لوک جب ب لا}}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$
- ۱۳- $(\frac{\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} + \text{لا}}{\text{ن}})$ جبکہ $\text{لا} = ۰$
- ۱۴- $\frac{\text{جب ن لا} - \text{جب لا}}{\text{لا}}$ اور $\frac{\text{جب ن لا} - \text{جب لا}}{\text{لا}}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$
- ۱۵- (جم لا) $\frac{\text{جم لا}}{\text{لا}}$ اور (جم لا) $\frac{\text{جم لا}}{\text{لا}}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$
- ۱۶- اگر ایک ننھی کی مساوات $\text{کم} + \text{کم} + \text{کم} + \text{کم} + \text{کم} + \text{کم} + \text{کم} = ۰$ ہو جہاں
 $\text{کم} + \text{کم} + \text{کم} + \text{کم} + \text{کم} + \text{کم} + \text{کم} = ۰$ بتجانس تفاعل ہیں کارٹیسری محدودوں میں درجہ

ہوتا ہے کیونکہ (لا-ج) فہم (لا) مائل بہ (لا-ج) یعنی مائل بہ لاتنا ہی ہوتا ہے لیکن مفروض کی بنا پر فہم (لا) مائل بہ صفر ہوتا ہے پس اگر محدود ہے تو اسکو لازماً صفر ہونا چاہئے۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $\frac{1}{\text{لوک } ۲ \text{ عہد}} + \frac{1}{\text{لوک } ۳ \text{ عہد}} + \frac{1}{\text{لوک } ۴ \text{ عہد}} + \dots$ متع ہے عہد کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے۔

$\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots$ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

ن ← ∞ کے لئے $\frac{1}{\text{لوک } (ن) \text{ عہد}} \div \frac{1}{ن}$ یعنی $(ن \text{ عہد} / \text{لوک } ن)$

مائل بہ لاتنا ہی ہوتا ہے [دفعہ ۵۳ مثال ۱] اس لئے سلسلہ معلومہ متع ہے چونکہ موسیقی سلسلہ متع ہے۔ جب عہد منفی ہو تو ظاہر ہے کہ سلسلہ متع ہے۔



باب ہشتم

تفرقی مساواتیں

۵۲۔ اس باب میں ہم چند تفرقی مساواتوں پر بحث کریں گے جو ابتدائی اعمال ریاضی میں استعمال ہوتی ہیں، اس جگہ ان کا محض مختصر سا خاکہ پیش کیا جائے گا تفصیلی بحث طالب علم کو خود (ساآٹھ کی تفرقی مساواتوں) مکملین) یا ہارے کی تفرقی مساواتوں (لونگ مین) میں ملے گی۔

معمولی تفرقی مساوات وہ مساواتی رشتہ ہے جو ایک متغیر متبوع اور ایک متغیر تابع اور تابع متغیر کے ایک یا زیادہ مشتقوں کے درمیان ہو۔
جزوی تفرقی مساوات وہ مساواتی رشتہ ہے جو دو یا زیادہ متبوع متغیروں ایک متغیر تابع اور تابع متغیر کے جزوی مشتقوں کے درمیان ہو۔

ہم یہاں صرف معمولی تفرقی مساواتوں سے بحث کریں گے۔
تفرقی مساوات کا رتبہ اس میں کے سب سے اعلیٰ مشتق کے رتبہ سے متعین ہوتا ہے، اور تفرقی مساوات کا درجہ اعلیٰ سے اعلیٰ مشتق کا درجہ ہے جبکہ مساوات کو کسروں سے صاف کر دیا جائے اور مشتقوں کی قوتیں مثبت صحیح عدد ہوں۔

مثال $لا^۲ + لا^۱ + لا^۰ = (لا^۲ - لا^۱) = لا^۰$ ۔ دوسرے رتبہ کی اور درجہ اول کی تفرقی مساوات ہے۔

$لا^۲ - لا^۱ + لا^۰ = لا^۰$ ۔ رتبہ اول اور درجہ دوم کی تفرقی مساوات ہے۔
اسقاط کے نظریہ سے ہم جانتے ہیں کہ ایک مقدار کو ۵ مساواتوں میں

دو مقداروں کو تین مساواتوں سے 'ن' مقداروں کو (ن+۱) مساواتوں سے ساقط کر سکتے ہیں۔ پس اگر ایک ایسی مساوات کو جس میں 'لا'، 'ما' اور مستقل شریک ہوتے ہیں ایک دفعہ تفریق کیا جائے تو نئی مساوات میں 'لا'، 'ما'، 'ما' اور مستقل شریک ہوں گے ان دو مساواتوں سے ایک مستقل ساقط ہو سیکے گا۔ اس طرح اسقاط کے بعد جو مساوات حاصل ہوگی وہ رتبہ اول کی تفرقی مساوات ہوگی جس میں مفروضہ مساوات کی نسبت مستحلات کی مقدار بقدر ایک کے کم ہوگی۔

اسی طرح اگر دی ہوئی مساوات کو دو دفعہ تفریق کیا جائے تو کل تین مساواتیں حاصل ہونگی جن سے دو مستقل ساقط ہو سکیں گے اور اسقاط کے بعد مساوات محصلہ **دوسرے** رتبہ کی تفرقی مساوات ہوگی جس میں مستحلات کی تعداد بہ نسبت اصلی مساوات کے بقدر دو کے کم ہوگی۔ وغیرہ وغیرہ۔

ہر صورت میں دی ہوئی مساوات کو محصلہ تفرقی مساوات کا کمال ابتدائی کہتے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ کمال ابتدائی میں ایک 'دو' مستقل شریک ہوتے ہیں جو متناظر تفرقی مساوات میں نہیں ہوتے جبکہ سو غرض الذکر بالترتیب رتبہ اول 'دو' کی تفرقی مساوات ہو۔ اسقاط کے عمل میں مستقل کی قیمت خواہ یہ کچھ ہی ہو بحث میں نہیں آتی 'ان مستقلوں کو ہم اختیار بھی مستقل کہیں گے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات

$$ما = لا + ح \quad (۱)$$

ہے، دو بار تفریق کرنے سے

$$عف = ما = ۲ لا \quad (۲)$$

$$عف = ما = ۲ لا \quad (۳)$$

پہلے تفریق سے 'ح' ساقط ہو جاتا ہے، (۲) اور (۳) سے 'لا' ساقط ہو سکتا ہے اور یہ تفرقی مساوات بنتی ہے

$$لا عف = عف = ما \quad (۴)$$

جب کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو (۱) سے قطع مکانی تعبیر ہوتا ہے جس کا وتر خاص $\frac{1}{2}$ ہے اور جس کا محور، محور صا پر منطبق ہوتا ہے۔ پس (۲) ایسے تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات ہے، نیز (۴) ان تمام مکافیوں کی تفرقی مساوات ہے جن کے محور، محور صا پر واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات (لا-ل) + (ما-ب) = ج ... (۱) ہے۔ دو دفعہ تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(لا-ل) + (ما-ب) = ج \dots\dots\dots (۲)$$

$$۱ + (عفا-ب) = ج \dots\dots\dots (۳)$$

ساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے ل' ب ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ج (عفا-ب) = ۱ + (عفا-ب) \dots\dots\dots (۴)$$

مساوات (۴) ان سب دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کا نصف قطر ج ہے، مساوات (۲) ان دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کا مرکز (ل' ب) ہے، مساوات (۳) ان دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کے مرکز خط ما = ب پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۵۔ پورا تکملہ۔ اگر دفعہ گذشتہ کی پہلی مثال میں ہم فرض کریں کہ

مساوات (۴) دی گئی ہے اور اس تفرقی مساوات سے شروع ہو کر تکمیل کے عمل سے ہم (۱) حاصل کرتے ہیں تو ایسے عمل کو ہم مساوات کا تکمیل کرنا یا محل کرنا کہیں گے۔

اس نقطہ نظر سے (۱) کو (۴) کا کامل تکملہ (یا پورا تکملہ) کہنا زیادہ مناسب ہوگا۔ ایسی صورت میں ل' ب کو ہم تکمیل کے اختیاری مستقل کہیں گے۔

مساوات (۴) میں دوسرے رتبہ کی ہے اور (۱) میں دو اختیار کی مستقل ہیں، تفرقی مساواتوں کی مستند کتابوں میں عام تفرقی مساوات کے پورے تکملے کے وجود کے متعلق مسائل ثابت کئے جاتے ہیں اور یہ دکھایا جاتا ہے کہ جب مساوات (۱) میں رتبہ کی ہو تو اسکے پورے تکملے میں اختیار کی مستقل شریک ہوتے ہیں۔

خاص تکملہ وہ ہے جو پورے تکملہ میں ایک یا زیادہ مستقلوں کو کوئی خاص قیمت دینے سے حاصل ہو، مثلاً دفعہ گذشتہ مثال (۱) میں مساوات (۴) کے خاص تکملے $ما = لا + ا$ ، $ما = ۲ لا$ ہو سکتے ہیں۔

تفرقی مساوات کے تکمل پر غور کرنے کا ایک اور نقطہ نظر بھی ہے اور وہ یہ ہے۔

تفاعل ما معلوم کر دو جو (۱) مساوات $لا + عفا = عفا$ ۔ کو پورا کرے (۲) جو ب کے مساوی ہو جبکہ $لا = ا$ (۳) جس کا پہلا مشتق ج ہو جبکہ $لا = ا$ چونکہ پورا تکملہ $ما = لا + ا$ ہے جس میں دو اختیاری مستقل $ا$ شریک ہوتے ہیں، ہم ان کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جو شرائط (۲) اور (۳) کو پورا کریں۔ ان شرائط سے حاصل ہوتا ہے

$$ب = ا + ا + ب، ج = ۲ ا + ا$$

$$پس ا = \frac{ج}{۲}، ب = ب - \frac{۱}{۲} ج$$

تفاعل مطلوب ہے $ما = \frac{ج}{۲} + لا + ب - \frac{۱}{۲} ج$ جو شرائط (۱) (۲) (۳) کو پورا کرتا ہے۔

اسی طرح کی ایک اور مثال کے لئے ملاحظہ ہو دفعہ ۶۹ حصہ اول مثالیں ۱ اور ۲۔ غالب علم کو چاہئے کہ ذیل کی مشقیں حل کرے۔ ان میں سے کئی تفرقی مساواتیں طبعیات

۱۰۔ اگر ما = (ج م ن لا + ب ج ب ن لا + ع ج م ف لا + ق ج ب ف لا) جہاں ل + ب اختیاری ہیں اور ن اور ف نامساوی ہیں تو ثابت کرو کہ

ع ف ما + ن ما = (ن۔ ف) ع ج م ف لا + (ن۔ ف) ق ج ب ف لا

۱۱۔ اگر ما = فو^۱ (ج م ن لا + ب ج ب ن لا) تو ع ف ما + ک ع ف ما + (ن۔ ف) (ک۔ م) =

۱۲۔ اگر ما = فو^۱ (و فو + ب تو^۱) تو ع ف ما + ک ع ف ما

۔ (ن۔ ف) (ک۔ م) =

۱۳۔ اگر ما = و فو + ب تو^۱ تو ع ف ما۔ (م + ن) ع ف ما + م ما =

۱۴۔ اگر ما = (و + ب لا) فو^۱ تو ع ف ما۔ ۲ ن ع ف ما + ن ما =

[متقابلہ کرو سوالات ۱۳ اور ۱۴ اکا]

۱۵۔ اگر ما = (و + ب لا) ج م ن لا + (ج + د لا) ج ب ن لا تو ع ف ما + ۲ ن ع ف ما + ن ما =

۱۶۔ اگر ما = (ج م ن لا + ب ج ب ن لا) / لا تو ع ف (لا ما) + ن لا ما = یا ع ف ما + ۲ ع ف ما + ن ما =

۱۷۔ اگر ما = (و فو^۱ + ب تو^۱) / لا تو ع ف ما + ۲ ع ف ما۔ ن ما =

۱۸۔ اگر ما = م لا + ۱/م جہاں م اختیاری مستقل ہے تو

(لا ع ف ما)۔ ما ع ف ما + ۱ =

۱۹۔ اگر $\frac{لا}{لا+جی} + \frac{ما}{ب+جی} = ۱$ جہاں گ اختیار مستقل ہے تو

لا (ما) عفا (ما) + (لا - ما - لا) ب (عفا ما - لا ما) =

ابتدائی مرکز دار مخروطیوں کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے جن سب کے ماسکے وہی ہیں [مرکز دار ہم ماسکے]

۲۰۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۴۵ کی مساوات (۳) کا پورا نتیجہ ہے

ف (لا) = (اجب) (اجب لا) + جب جم (اجب لا) جہاں ا، ب اختیار مستقل ہیں۔

۵۶۔ رتبہ اول اور درجہ اول کی مساواتیں۔ اب ہم مساواتوں کے ایک دو نمونے ایسے بیان کریں گے جن کا محمل باسانی عمل میں آسکتا ہے، بہر کیف انکا محمل معمولی محملوں کی قیمت دریافت کرنے کے عمل پر آپ کے متصور ہو سکتا ہے۔ جہاں تک تفرقی مساواتوں کے نظریہ سے تعلق ہے اگر کسی مساوات کو ذیل کی کسی ایک صورت میں بخول کر دیا جائے

$\frac{فرما}{فرلا} = ف (لا)$ ، $\frac{فرما}{فرلا} = فا (ما)$

تو ہم مساوات کو عمل شدہ قرار دیں گے کیونکہ ان مساواتوں کے محمل ہیں

ما = ف (لا) فرلا + م (مستقل) لا = ف (ما) فرما + م (مستقل)

اور اسکے بعد معمولی عمل تکمیل ہے۔

نمونہ ۱۔ متغیر جدائی پذیر۔ متغیر جدائی پذیر خیال کئے جاتے ہیں جبکہ مساوات کو اس طرح لکھنا ممکن ہو۔

ف (لا) فرلا + فا (ما) فرما =

جہاں ف (لا) صرف لا کا تفاعل ہے اور فا (ما) صرف ما کا، مساوات کا عمل اس صورت میں ہے ف (لا) فرلا + ف (ما) فرما = م

مثال ۱۔ $n (1+a) = m (1+b) = 0$

یعنی $\frac{n}{1+b} + \frac{m}{1+a} = 0$

اس لئے n لوگ $(1+b)$ m لوگ $(1+a) =$ مستقل

یا $\text{لوگ } [(1+b)^n (1+a)^m] = \text{مستقل}$

یا $(1+b)^n (1+a)^m = \text{مستقل}$ ۔
اوپر کی تین مساواتوں میں سے کوئی ایک تفرقی مساوات کا حل خیال کیج سکتی ہے لیکن آخری مساوات جبر پیمائش میں ہونے کی وجہ سے زیادہ موزوں ہے۔

نوٹ ۲۔ متجانس مساواتیں۔ تفرقی مساوات متجانس کہلاتی ہے

اگر وہ اس شکل کی ہو

$$\frac{f(1+a)}{(1+b)} = 0$$

جہاں $f(1+a)$ $(1+b)$ $f(1+a)$ $(1+b)$ دونوں میں ایک ہی درجہ کے متجانس
تفاعل ہیں۔
اوپر کی مساوات کو حل کرنے کے لئے متغیر تابع کی بجائے رکھو $1+a = 1+b$

$$\text{مساوات ہو جاتی ہے } \frac{f(1+a)}{(1+b)} = 0 = \frac{f(1+a)}{(1+b)}$$

اب متغیر جدا ہو سکتے ہیں۔

مثال ۲۔ $2(1+a) = 1(1+b) = 0$

رکھو $1+a = 1+b$ اس طرح حاصل ہوتا ہے $2(1+a) = 1(1+b)$

جس سے $\frac{2}{1+a} - \frac{1}{1+b} = 0$

اس لئے لوک { لا (۱- و) } = مستقل = لوک م

یا لا - ما = م لا ' م اختیاری مستقل ہے۔

مساوات (لا + ب + ما + ج) عفا = لا + ب + ما + ج کو
اس طرح تجانس بنا سکے ہیں۔ رکھو ضما = لا + ب + ما + ج { بشرطیکہ

عفا = لا + ب + ما + ج ' }

اوب - اب صفر نہ ہو [دیکھو مشق ۱، سوال ۶، ۷]

نمونہ ۳۔ خطی مساواتیں۔ تفرقی مساوات خطی کہلاتی ہے جبکہ متغیر تابع

اور اسکے مشتقات جو اس میں شریک ہوں سب درجہ اولی کے ہوں۔

پس رتبہ اول کی خطی مساوات اس شکل کی ہوگی

عفا + ف + ما = ق

جہاں ف اور ق صرف لا کے تفاعل (یا مستقل) ہیں۔

فرض کرو کہ ف = م لا ' مساوات کو ف + ف سے ضرب دو

اب چونکہ عفا ف + ف = ف عفا ف = ف + ف

اس لئے حاصل ہوتا ہے ف عفا + ف + ف = ف عفا (ف + ف)

اسلئے عفا (ف + ف) = ف + ف

اسلئے ف + ف = م ف + ف لا + م

نتیجہ صریح۔ مساوات عفا + ف + ف = ق + ف خطی مساوات کی

صورت میں لائی جاسکتی ہے اگر ہم رکھیں و = مان + اور و کو متغیر تابع

فرض کریں۔

مثال ۳۔ (۱۔ لا) عفا + لا ما = لا

$$\text{یہاں عفا ما} + \frac{\text{لا}}{\text{لا} - ۱} \text{ ما} = \frac{۱}{\text{لا} - ۱}$$

$$\text{اور ف} = \text{ک} \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - ۱} = -\frac{۱}{۲} \text{ لوک (۱۔ لا)} = \frac{۱}{\text{لا} - ۱}$$

$$\text{فوا} = \frac{۱}{\text{لا} - ۱}$$

$$\text{اسلئے} \frac{۱}{\text{لا} - ۱} \times \text{ما} = \text{ک} \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - ۱} + \text{م} = \text{م} + \frac{۱}{\text{لا} - ۱}$$

$$\text{پس ما} = ۱ + \text{م} \frac{\text{لا} - ۱}{\text{لا}}$$

مثال ۴۔ قوت لا کی ایک برقی رو ایک ایسے دور میں بہ رہی ہے جسکی
امالیت لی ہے اور فراجمت ز برقی رو پر بیرونی قوت محرکہ برق م عمل
کرتی ہے، رو کی مساوات وقت ت پر ہوگی

پہلے فرض کرو کہ م مستقل ہے اور ساوی ہے م کے، نیز لی اور مستقل ہیں

$$\text{لا} + \frac{\text{ز}}{\text{لی}} = \frac{\text{لا}}{\text{لی}}$$

$$\text{اسلئے} \frac{\text{ز}}{\text{لی}} = \frac{\text{لا}}{\text{لی}} - \text{قوت} + \text{م} = \frac{\text{لا}}{\text{ز}} + \text{م}$$

$$\text{اور لا} = \frac{\text{لا}}{\text{ز}} + \text{م} - \frac{\text{ز}}{\text{لی}}$$

جب 'ت' = 'لا'۔ اور اس لئے م = $\frac{۱۴}{۲}$

$$\text{اسلئے لا} = \frac{۱۴}{۲} (۱ - \frac{۱۴}{۲})$$

اس میں $\frac{۱۴}{۲}$ کو $\frac{۱۴}{۲}$ زائد یا امال شدہ (Induced) روپے جو معدوم ہو جاتی ہے جیسے کل روپائی قائم قیمت $\frac{۱۴}{۲}$ حاصل کر لیتی ہے۔ اس کے بعد فرض کرو کہ م = ۱۴ جم (فت۔ عہ)

اب چونکہ $\frac{۱۴}{۲}$ جم (فت۔ عہ) فرت = $\frac{۱۴}{۲}$ (جم (فت۔ عہ) + فل جب (فت۔ عہ))

میں حاصل ہوتا ہے م = $\frac{۱۴}{۲}$ + $\frac{۱۴}{۲}$ (جم (فت۔ عہ) + فل جب (فت۔ عہ))

جیسے ت بڑھتا ہے رقم م کو $\frac{۱۴}{۲}$ کے قابل لحاظ ہونے کی اہمیت کم ہوتی جاتی ہے اور دوسری رقم سے قائم اتہزاز حاصل ہوتا ہے، قائم اتہزاز کو اس شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{لا} = \frac{۱۴}{۲} \text{ماز + فل} \text{جم (فت۔ عہ۔ عہ)}$$

جہاں مس عہ = $\frac{۱۴}{۲}$ مقدار ماز + فل کو حلقہ کی تقاضا (Impedance) کہتے ہیں۔

نمونہ ۴۔ حاضر مساواتیں۔ مساوات

$M + N \text{ عفا} = M + N \text{ فلا} + M \text{ فرما} =$
کو حاضر یا ٹھیک مساوات کہیں گے جبکہ M ، N اور M کے تفاعل ہوں

اور $M \text{ فلا} + M \text{ فرما} =$ پورا تفرقہ ہو یعنی $\frac{M \text{ جفان}}{M \text{ جفلا}} =$ (دفعہ ۹۴، اصول)
ایسی صورت میں ایک تفاعل عا ایسا موجود ہے کہ $M \text{ فرما} + M \text{ فرما}$
اور مساوات کا ٹکملہ ہے $r =$ مستقل۔

مثال ۵۔ $2 \text{ لا} - M + 2 \text{ لا} + (2 \text{ لا} - 2 \text{ لا} + 2 \text{ لا}) \text{ عفا} =$

یہاں $M = 2 \text{ لا} - M + 2 \text{ لا} = 2 \text{ لا} - 2 \text{ لا} + 2 \text{ لا}$

اور $\frac{M \text{ جفان}}{M \text{ جفلا}} = 2 \text{ لا} - 2 \text{ لا} =$

پس معلوم ہوا کہ یہ مساوات حاضر یا تیار مساوات ہے۔ اسلئے ہم مساوات کو
کامل تفرقوں کے مجموعہ کے طور پر ترتیب دے سکتے ہیں۔

یعنی $(2 \text{ لا} + M \text{ فرما}) + (2 \text{ لا} + M \text{ فرما}) - (2 \text{ لا} + M \text{ فرما}) + 2 \text{ لا} + M \text{ فرما}$

یعنی $(2 \text{ لا} + M) - (2 \text{ لا} + M) + (2 \text{ لا} + M) + (2 \text{ لا} + M)$

پس $r = 2 \text{ لا} - M + 2 \text{ لا} + M + 2 \text{ لا} + M$

اور ٹکملہ ہے $2 \text{ لا} - M + 2 \text{ لا} + M + 2 \text{ لا} + M =$ (مستقل)

مثال ۶۔ $2 \text{ لا} - M + 2 \text{ لا} + M \text{ عفا} =$

یہ حاضر مساوات نہیں ہے لیکن اگر اسے $\frac{1}{2}$ سے ضرب دیدیا جائے تو یہ حاضر

مساوات ہو جائے گی،

$\frac{2 \text{ لا} - M}{2} + \frac{2 \text{ لا} + M}{2} = \text{عفا} = \frac{2 \text{ لا} + M}{2}$

محکمہ ہے $\frac{لا + ما}{لا} = ق$ یا $لا + ما = ق لا$ جہاں ق مستقل ہے

جزو ضربی $\frac{1}{لا}$ کو جبکہ ساتھ ضرب دینے سے مساوات حاضر بن جاتی ہے
 متکمل جزو ضربی کہتے ہیں۔ جب کوئی مساوات ”ماضر“ نہ ہو تو کوئی ایسا
 تکمل جزو ضربی بجانب لینے سے مساوات حاضر بن جاتی ہے اور مکمل ہونگے ہیں۔
 ۵۷۔ مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں لیکن درجہ اول کی نہیں۔ حنف ما کو ع
 سے تعبیر کرو، اگر مساوات ن، دیں درجہ کی ہو تو یہ اس کی شکل ہوگی

$$1 \text{ ع} + 2 \text{ ب} + 3 \text{ ع} + \dots + ط + ع + ل = \dots (1)$$

جہاں ا، ب، لا، ما کے تفاعل ہیں یا مستقل ہیں۔
 اگر ممکن ہو تو ع کے لئے حل کرو، عام طور پر ع کی ن قیمتیں ہونگی
 $ع = ع، ع = ع، ع = ع، \dots$

اور ان میں سے ہر ایک مساوات کو تکمل کرنے سے جو رشتہ حاصل ہوگا وہ
 (۱) کو پورا کریگا۔

مثال ۱۔ لا ما ع۔ (لا + ما) ع + لا ما = .

$$\text{اسلئے } ع = \frac{ما}{لا} \text{ یا } ع = \frac{لا}{ما}$$

اور ان مساواتوں کے محکمہ ہیں ما = ص لا، ما۔ لا = ص جہاں ص
 اور ص مستقل ہیں۔

مثال ۲۔ کلیہ ذی مساوات ما = لا ع + ف (ع) (۱)

یہ خاص صورت کی مساوات ہے، اس کو اس طرح تکمل کرتے ہیں۔
 (۱) کو بلحاظ لا کے تفرق کرو، حاصل ہوگا

$$ع = ع + لا \frac{فرع}{فرلا} + ف (ع) \frac{فرع}{فرلا}$$

$$یا \{ لا + ف (ع) \} \frac{فرع}{فرلا} = (۲)$$

$$پس \frac{فرع}{فرلا} = یعنی ع = مستقل = ج$$

$$لا + ف (ع) = (۳)$$

(۱) ع کے لئے مندرج کرنے سے پورا منجملہ حاصل ہوتا ہے

$$ما = ج + لا + ف (ج) (۴)$$

علاوہ اسکے اگر (۱) اور (۳) سے ع ساقط کر دیا جائے تو لا اور ما میں رشتہ مائل ہوگا جو (۱) کو پورا کرے گا، یہ رشتہ (۴) میں ج کو کوئی خاص قیمت دینے سے مائل نہیں ہو سکتا، اسکو ہم مساوات کا نادر مل کہیں گے۔

در اصل نادر مل خطوط کے قبیل (۴) کا لغاف ہے، کیونکہ اگر ہم (۴) اور

لا + ف (ج) = سے ج کو ساقط کریں تو صریحاً لا، ما میں وہی رشتہ مائل ہوگا جسے نادر مل کہتے ہیں (صرف ج اور ع کا تبادلہ کر دیا گیا ہے) اور دفعہ ۳۶ میں ہم نے دیکھا ہے کہ لغاف کا دُ محال وہی ہوتا ہے جو کہ قبیل (۴) کے منحنیوں کا ان کے انتہائی نقاط تقاطع پر۔

مثال کے طور پر ما = لا + ع + $\frac{۱}{ع}$ کا پورا منجملہ

$$ما = ج + لا + \frac{۱}{ج}$$

اور نادر مل ما = لا + ۱

۵۸۔ رتبہ دوم کی مساواتیں۔

نمونہ ۱۔ عفا ما = ف (لا) جو صرف لا کا قائل ہے۔

لمحاطہ لاکے دو بار مکمل کرو دو اختیار می مستقل شریک ہونگے۔

نمونہ ۲۔ عفا = ف (وا) صرف ما کا تفاعل۔

عفا کے ساتھ ضرب دو تہ چونکہ عفا عفا = عفا [۱/۲ (عفا ما)]

۱/۲ (عفا ما) = ف (وا) عفا اور لا + م (مستقل) = ف (وا) عفا + م

اب یہ رتبہ اول کی مساوات ہے، ممکن ہے کہ یہ آگے تکمل ہو سکے۔

مثال ۱۔ طول ل کے سادہ رقا ص کی حرکت کی مساوات ہے
ل طما = ج جب طما تکمل کرنے کی غرض سے طما کے ساتھ

ضرب دو حاصل ہوگا

۱/۲ ل (طما) = ج جم طما + م جہاں م مستقل ہے۔

جب ات = تو فرض کرو کہ طما = عدا اور طما =

اس طرح م = ج جم عدا

اور طما = [۲/۱ جم طما - جم عدا] = ۲ [ج] جب عدا جب طما

علاست جنر کے پہلے فی علاست لی گئی ہے کیونکہ ت کے بڑھنے سے طما گھٹتا

اب رکھو جب طما = جب عدا جب فدا تحول کے بعد

$$\text{فرد} = - \left[\frac{\text{ل}}{\text{ج}} \right] \times \text{را۔ جب عدا جب فدا}$$

ابتدائی تفاعلوں کے واسطے سے یہ تکمل عمل میں نہیں آسکتا، لیکن ت کو ایک
لا متناہی سلسلہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ ت کی قیمت چوتھا لی

ت دوران کے لئے ہے [۱/۲] دفعہ ۴م، مثال ۳ [عام طور پر

ت = $\frac{ل}{ج}$ $\frac{ف}{د}$ ۱- جبا عسجبا فد

نمونہ ۳۔ عفا = ف (عفا ما) جو صرف عفا کا تفاعل ہے۔
 فرض کرو کہ عفا = و، حاصل ہوگا عفو = ف (و) اس سے
 و معلوم کرنا ممکن ہے، اسکے بعد ما معلوم ہو سکتا ہے۔

مثال ۲۔ مساوات $\{ (عفا) + ۱ \}^2 = عفا$ سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{ج د}{و + ا} + ١ \text{ (ستقل)}$$

$$\frac{(1-\lambda)}{\{(1-\lambda) - 'ج'\}}$$

$$6 = 7 + \{ \text{ج} - (\text{ا} - \text{ب}) \} + \text{ب (مستقل)}$$

$$ج = (ب - ا) + (د - ج)$$

۵۹۔ خلی مساواتیں۔ رتبہ دوم کے نمونہ کی خلی مساوات یہ ہے

عِفْءًا + ط عِفْءًا + ق ما = ص (۱).....

جہاں ط، ق، مر صرف لا کے تفاعل ہیں (یا مستقل ہیں)

نام خطی مساواتوں کا یوں انتظام دو کثافاتوں کا حاصل جمع ہوتا ہے

(۱) اکتھم تفاعل (۴، ف) جو اوپر کی مسادات (۱) کا پورا اٹھلے ہو جبکہ اس
(یا عام طور پر وہ رحم جو ا اور اسکے مشتقوں پر منحصر نہ ہو) صغیر ہو۔ اس تفاعل میں
(دو اور ن، دین رتبہ کی مسادات میں ن) اختیار ہی مستقل ہونگے۔

(۲) خاص محکمہ (خزائنات) جو پوری مساوات (۱) کا عمل ہو جیسے یہ ادب پر بنیدرج ہے یعنی جبکہ اسکے دائیں بائیں جانب کے رکن دونوں برقرار رکھے جائیں۔ اس فعل

میں اختیاری مستقل نہیں واقع ہونگے۔

ہم ذیل کا مسئلہ صرف رتبہ دوم کی مساواتوں کے لئے ثابت کرتے ہیں، لیکن استدلال عام ہے۔ 'ن' میں رتبہ کی مساوات کے لئے 'ع' کی طرح کے 'ن' تفاعل ہونگے اور 'ل' میں 'ن' اختیاری مستقل شریک ہونگے۔

اگر ما = ع اور ما = و مساوات ذیل کو پورا کریں

عفا + ما + ط عفا + ما + ق = ما + (۲)

تو ا + ع + ب و بھی پورا کریگا، (ا + ب) اختیاری مستقل ہیں۔

کیونکہ اگر عفا + ط عفا + ق = ع + و اور عفا + ط عفا + ق = و

تو عفا + (ا + ب و) + ط عفا + (ا + ب و) + ق = (ا + ب و) + و =

یعنی ا + ب و مساوات (۲) کو پورا کرتا ہے۔

اب اگر ما = ہ خاص تکملہ ہو یعنی اگر ہ مساوات (۱) کو پورا کرے اور

ا + و + ب و متعمم تفاعل ہو تو ا + ب و + ہ مساوات (۱) کو پورا کریگا

کیونکہ اگر ما = ا + ب و + ہ تو

عفا + ما + ط عفا + ق = عفا + (ا + ب و) + ط عفا + (ا + ب و)

+ ق = (ا + ب و) + عفا + ط عفا + ہ + ق =

= صفر + س [کیونکہ بائیں جانب پہلا حصہ صفر کے مساوی

ہے اور ہ مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے اسلئے

دوسری سطر س ہے]

پس ما کی یہ قیمت (۱) کو پورا کرتی ہے اور چونکہ اس میں دو مستقل ہیں یہ جملہ

مساوات (۱) کا پورا تکملہ ہے۔

اس جگہ ہم صرف ان مساواتوں پر غور کریں گے جن میں ط اور ق محض مستقل ہیں

۶۰۔ متعمم تفاعل۔ ذیل کی مساوات کو تکمل کرنا ہے

$$\text{عف}^2 \text{ ما} + \text{عف} \text{ ما} + \text{ب ما} = \dots\dots\dots (۳)$$

(۱) فرض کرو کہ ما = $\frac{1}{2}$ (لما مستقل) تب

$$(\text{لما} + \text{لما} + \text{ب}) \frac{1}{2} = \dots\dots\dots$$

پس اگر لما ذیل کی معاون مساوات کی اصل ہو تو

$$\text{لما} + \text{لما} + \text{ب} = \dots\dots\dots (۴)$$

تو $\frac{1}{2}$ مساوات (۳) کو پورا کریگا۔ (۴) کی دو اصلیں لما، لیا ہیں

$$\text{لما} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} - \text{ب} \right] \quad \text{لیا} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} - \text{ب} \right]$$

اور $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ مساوات (۳) کے دو حل ہیں۔

پس (۳) کا پورا تکملہ ہے

$$\text{ما} = \text{لما} + \text{ب} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \left(\text{لما} + \text{ب} \right) \frac{1}{2}$$

$$\text{جہاں ن} = \frac{1}{4} - \text{ب} \dots\dots\dots (۵)$$

اب ہم خاص صورتوں پر غور کرتے ہیں۔

(۲) اگر $\frac{1}{2} = \text{ب}$ تو مساوات (۴) کی دونوں مساوی اصلیں ہونگی یعنی

$$\text{لما} = \text{لما} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} - \text{ب} \right] \text{ ایسی حالت میں مساوات (۵) ہو جائیگی}$$

$$\text{ما} = (\text{لما} + \text{ب}) \frac{1}{2}$$

اور اس میں اختیاری مستقل صرف ایک ہے کیونکہ $(\text{لما} + \text{ب})$ کی بجائے ہم

ج لکھ سکتے ہیں۔ جب $\frac{1}{2} = \text{ب}$ تو فرض کرو کہ ما = $\frac{1}{2}$ اور مساوات

(۳) ہو جاتی ہے جزو ضربی $\frac{1}{2}$ کو نظر انداز کرنے سے

عفا ع =۔ جس کا پورا تکملہ ع = ۱ + جب لا
پس (۳) کا پورا تکملہ اس صورت میں جبکہ معاون مساوات کی اصلیں مساوی
ہوں، ہر ایک = - $\frac{1}{p}$ یہ ہے

$$ما = (۱ + جب لا) \text{ تو } \frac{1}{p} \dots\dots\dots (۶)$$

(۳) اگر ۱ > ۴ ب تو (۴) کی اصلیں خیالی ہیں۔ پھر فرض کرو کہ
ما = تو $\frac{1}{p}$ اور مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$عفا ع + م = ع =۔ \dots\dots\dots (۷)$$

جہاں $\frac{1}{p}$ ۱ - ب =۔ م اور م حقیقی ہے۔
اب ع = جم م لا، ع = جب م لا دونوں (۷) کو پورا کرتے ہیں،
پس اسکا پورا تکملہ ہے

$$ع = (۱ + جب جب م لا) \text{ اور (۳) کا پورا تکملہ جبکہ } ۱ > ۴ ب \text{ یہ ہے}$$

$$ما = تو \frac{1}{p} ع = تو \frac{1}{p} (۱ + جب جب م لا) \dots\dots\dots (۸)$$

اب ہم دیکھیں گے کہ (۵) اور (۸) کس طرح لکھے جاسکتے ہیں جبکہ (۴) کی اصلیں
معلوم ہوں، فرض کرو کہ خ حسب معمول ۱ - آ کو تعبیر کرتا ہے، (۴) کی اصلیں
جب حقیقی ہوں تو رکھو $\frac{1}{p}$ - ب = ن، اصلیں اس حالت میں ہوں گی۔

$$- \frac{1}{p} + ن - \frac{1}{p} - ن$$

$$\text{اور حل ہے } ما = تو \frac{1}{p} (۱ + تو \frac{1}{p} جب تو \frac{1}{p})$$

اگر (۴) کی اصلیں خیالی ہوں تو رکھو $\frac{1}{p}$ - ب = - ن

اور اصلیں ہیں۔ $\frac{1}{4} + \text{ن خ} - \frac{1}{4} - \text{ن خ}$

اور حل ہے $\text{ما} = \text{قو}^{\frac{1}{4}}$ (ا. جم ن لا + ب جب ن لا)

گویا $\text{قو}^{\frac{1}{4}}$ لا، $\text{قو}^{\frac{1}{4}}$ کی بجائے ہم کہتے ہیں جم ن لا جب ن لا۔
یہ قابل توجہ ہے کہ معاون مساوات عفا کی بجائے لہ رکھنے اور ما کو
نکال دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ عفا^۱ ما + عفا^۲ ما - ما =

معاون مساوات لہ^۱ + لہ^۲ - لہ^۱ = لہ^۱ - لہ^۱ =

حل $\text{ما} = \text{ا. قو} + \text{ب. قو}^{\frac{1}{4}}$

مثال ۲۔ عفا^۱ ما + عفا^۲ ما - عفا^{۱۰} ما =

معاون مساوات لہ^۱ + لہ^۲ - لہ^{۱۰} = لہ^۱ + لہ^۲ - لہ^{۱۰} =

حل $\text{ما} = \text{قو}^{\frac{1}{4}}$ (ا. جم ۳ لا + ب جب ۳ لا)

مثال ۳۔ عفا^۱ ما - عفا^۲ ما + عفا^۵ ما - عفا^۸ ما + عفا^{۱۲} ما =

معاون مساوات لہ^۱ - لہ^۲ + لہ^۵ - لہ^۸ + لہ^{۱۲} =

لہ^۱ = لہ^۱، لہ^۲ = لہ^۲، لہ^۵ = لہ^۵، لہ^۸ = لہ^۸، لہ^{۱۲} = لہ^{۱۲}

مساوی اصولوں لہ^۱، لہ^۲ سے ملتا ہے (ا. ب لا) قو^۱ خیالی اصولوں

۲ خ - ۲ خ سے ج. جم ۲ لا + ج. جب ۲ لا پس

ما = (ا. ب لا) قو + ج. جم ۲ لا + ج. جب ۲ لا

۶۱۔ خاص متکملہ۔ نہایت مشہور علی طور پر کار آمد صورتیں وہ ہیں جن میں
اس طرح کی رمتوں کی قو^۱ ل جب عفا^۱ کی جم عفا^۱ لگا

مجموعہ ہو۔ خاص نچلہ معلوم کرنے کا آسان طریقہ ابدال کا ہے۔ مساوات (۱) اب ہے

$$\text{عفا} + \text{ا} = \text{عفا} + \text{ب} = \text{ا} = \text{سر} \dots\dots\dots (۹)$$

صورت اول - $\text{سر} = \text{ل} + \text{و} + \text{علا}$ ، فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{ج} + \text{و} + \text{علا}$ ، ہم ج کی ایسی قیمت معلوم کرتے ہیں کہ مساوات (۹) پوری ہو جائے۔ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ج} (\text{علا} + \text{ا} + \text{علا} + \text{ب}) = \text{ل} + \text{و} + \text{علا}$$

$$\text{پس ج} + \text{و} + \text{علا} = \text{مساوات کو پورا کرے گا اگر ج} = \frac{\text{ل}}{\text{علا} + \text{ا} + \text{علا} + \text{ب}}$$

لیکن اسکی مستثنیٰ صورتیں ہیں
صورت اول (۱) اگر $\text{علا} + \text{علا} + \text{مساوات} (۴)$ کی اصل ہو تو

$\text{علا} + \text{ا} + \text{علا} + \text{ب} =$
اور ج کی قیمت لا متناہی ہوگی، اس حالت میں $\text{ج} + \text{و} + \text{علا}$ مندرج کر کے دیکھو اگر $\text{علا} + \text{علا} + \text{مساوات}$ کی ابھری اصل ہو اور ج $\text{لا} + \text{و} + \text{علا}$ کر کے دیکھو اگر $\text{علا} + \text{و} + \text{علا}$ ہو۔

$$\text{مثال ۱۔ عفا} + \text{ا} = \text{عفا} + \text{ب} = \text{ا} = \text{سر} + \text{و} + \text{علا}$$

مساوات لہذا $\text{ا} = \text{ل} + \text{و} + \text{علا} + \text{ب} =$ دو طرفہ
خاص نچلہ معلوم کرنے کے لئے $\text{و} + \text{علا}$ کے ساتھ الگ الگ عمل کر دیکھو۔ چونکہ مساوات کی دوہری اصل ہے، اس لئے $\text{و} + \text{علا}$ کے جواب میں خاص نچلہ معلوم کرنے کے لئے آزمائشی حل

$$\text{ج} + \text{و} + \text{علا} = \text{و} + \text{علا} + \text{ب} = \text{ا} = \text{سر} + \text{و} + \text{علا}$$

$$\text{مساوات ہو جاتی ہے } ۲ \text{ ج} + \text{و} + \text{علا} = \text{و} + \text{علا} + \text{ب} = \text{ا} = \text{سر} + \text{و} + \text{علا}$$

جس سے ج = $\frac{1}{p}$ ، ک = $\frac{1}{a}$ اسلئے

خاص تکملہ = $\frac{1}{p} \text{ لا}^2 \text{ کو} + \text{و}^2 \text{ لا}$

فول کے جواب میں خاص تکملہ کا جو حصہ ہے وہ صورت اول کے بلا واسطہ استعمال سے
ماہل ہو سکتا ہے پورا تکملہ ہے متم تفاعل + خاص تکملہ

= (ل + جب لا) کو + $\frac{1}{p} \text{ لا}^2 \text{ کو} + \text{و}^2 \text{ لا}$

صورت دوم - م = ل جب عدا لا + م جم عدا لا
آزمائشی حل اس صورت میں لو

ما = ک جب عدا لا + ف جم عدا لا
مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(عدا - ل - عدا ف + ب) جب عدا لا + (عدا ف + ل عدا ک + ب ف) جم عدا لا
= ل جب عدا لا + م جم عدا لا

اور مساوات یوری ہو گئی اگر

(ب - عدا) ک - ل عدا ف = ل عدا ک + (ب - عدا) ف = م

یا ک = $\frac{(ب - عدا) ل + ل عدا م}{(ب - عدا) + ل عدا}$ ف = $\frac{ل عدا ل + (ب - عدا) م}{(ب - عدا) + ل عدا}$

اگر ل = ۰ تو ماہل ہوتا ہے ک = $\frac{ل}{ب - عدا}$ ، ف = $\frac{م}{ب - عدا}$

لیکن یہ حل ناکام رہتا ہے اگر عدا = ب یعنی جب متم تفاعل
لا ل جم عدا لا + ب جب عدا لا ہو۔ ایسی حالت میں

صورت دوم (ل) اگر ل = ۰ اور عدا = ب تو آزمائشی سے معلوم ہو گا کہ

خاص تکملہ = - $\frac{ل}{عدا}$ لا جم عدا لا + $\frac{م}{عدا}$ لا جب عدا لا

جہاں $س = لی جب عا لا + م جم عا لا$
 مثال ۲۔ مساوات $لا + گی لا + م لا = ل جم (ن ت - عا) \dots (۱)$
 حرکتی اور برقی نظریہ میں نمونہ کی مساوات ہے۔

شتم تفاعل معلوم کرنا آسان ہے۔ خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے آزمائش کے طور پر رکھو
 $لا = ل جم (ن ت - عا) + ف جب (ن ت - عا) \dots (۲)$
 (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$(- ن گ + کن ف + م ص) جم (ن ت - عا)$
 $+ (- ن ف - کن گ + م ص ف) جب (ن ت - عا)$
 $= ل جم (ن ت - عا)$

پس (۱) پوری ہوگی اگر
 $(م ص - ن گ + کن ف = ل - کن گ + م ص ن ف) =$

اے کے $ص = (م ص - ن گ + کن ف) = (م ص - ن گ + کن ف)$
 اس لئے خاص تکملہ $= (م ص - ن گ + کن ف) = (م ص - ن گ + کن ف)$

$ل جم (ن ت - عا - عا) =$ جہاں $مس عا =$ $کن$
 $(م ص - ن گ + کن ف)$

اگر $ک =$ اور $ن =$ م ص تو صورت دوم (۱) پیدا ہوتی ہے، اس حالت میں

خاص تکملہ $= \frac{ل}{ن} ت جب (ن ت - عا)$

صورت سوم۔ اگر $س$ ، لا کا منطبق صحیح تفاعل ہو تو امتحان کے طور پر ماکے لئے
 ایک منطبق صحیح تفاعل رکھ کر دیکھو، سروں کی یمنیں ایسی ہونی چاہئیں کہ
 تفاعل مساوات کو پورا کرے۔

۶۲۔ ہمزد مساواتیں۔ اب ہم چند مثالیں حل کریں گے جن سے معمولی

تفرقی ہمزاد مساواتوں کے مکمل کرنے کی توضیح ہوگی، واضح ہو کہ مساواتوں کی تعداد وہی ہونی چاہیے جو تابع متغیروں کی تعداد ہو۔ ہم ت کو متغیر متنوع فرض کریں گے اور صرف دو تابع متغیروں لا، ما کے لئے بحث کو محدود رکھیں گے۔

مثال ۱۔ لا = سہ ما (۱)

ما = سبہ لا (۲)

(۱) کو تفریق کرو اور (۲) سے ما کی قیمت سہ لا مندرج کر دو اس طرح ایک معمولی تفرقی مساوات ایک تابع متغیر کی رقوم میں حاصل ہوگی، وہ یہ ہے
لا + سہ لا = جس کا حل ہے

لا = اجم سہ ت + جب سہ ت یا لا = ج جم (سہ ت - سہ) ... (۳)
ما کی قیمت اب (۲) سے حاصل ہو سکتی ہے یعنی

ما = اجم سہ ت + جب سہ ت یا ما = ج جم (سہ ت - سہ) ... (۴)
یہ امر توجہ کے قابل ہے کہ اگرچہ ا، ب بالکل اختیاری مستقل ہیں لیکن ما میں
کے مستقل معین ہو جاتے ہیں جبکہ لا کے مستقلات کو معین کر دیا جائے، اگر (۱)
میں صرف لا شریک ہوتا اور (۲) میں صرف ما تو لا میں کے مستقلات
سے ما کے مستقل معین نہ ہوتے۔ مثلاً مساواتوں
لا + سہ لا = ۰، ما + سہ ما =

سے حاصل ہوتا ہے لا = اجم سہ ت + جب سہ ت، ما = ج جم سہ ت + ف جب سہ ت
اور مستقلوں ا، ب، ج، ف میں کوئی رشتہ نہیں۔

مثال ۲۔ لا + ۵ لا - ۳ ما = ۰ (۱) ما + ۵ لا - ۷ ما = ۰ (۲)

(۱) کو تفریق کرو لا + ۵ لا - ۳ ما = ۰ (۳)
(۱)، (۲)، (۳) سے ما، ما سا فظ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا - ۲ لا + ۱۰ لا = ۰ (۴)

جس کا نکلہ ہے لا = ۰ (۴) اجم سہ ت + جب سہ ت (۳) (۵)
اب مساوات (۱) سے ما معلوم ہو سکتا ہے

ما = قو { (۲) + (ب) جم ۳ + (۲) ب - (۱) جب ۳ + (۲) } (۶)
 اگر (۱) اور (۲) دونوں میں لا، ما شامل ہوتے تو ہم دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو تفریق کرتے اور چار مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) سے ہم ما، ما، ما، ما ساقط کر سکتے۔

مثال ۳۔ جیسا مثال بالا میں ذکر ہوا ہم ذیل کی مساواتوں پر غور کریں گے جو دو باہم اثر انداز برقی حلقوں کو منسلک کرتی ہیں۔

ل لا + م ما + ز لا = ح پ (۱)

م لا + ح ما + س ما = ق ق (۲)

لا، ما برقی رو میں ہیں، ل، ح ذاتی امانیتیں ہیں اور م، ان کی باہمی امانیت ہے، ز اور س مزاحمتیں ہیں اور ح اور ق خارجی محرکہ برقی قوتیں ہیں۔ حاصل ضرب ل ح بڑھ سکتے۔

مثال ۲ کے موافق (۱) اور (۲) کو تفریق کرنے سے ہم ما، ما، ما ساقط کر سکتے ہیں لیکن اس جگہ ایک اور طریقہ کی ہم تشریح کرتے ہیں۔ متتم تفاعل اور خالص متعلقہ کا اصول صریحاً ہمزد داخلی مساواتوں کی صورت میں بھی درست ہے۔ ح اور ق یا تو مستقل ہیں یا ت کے تفاعل میں اور ہم اصول مذکورہ کو (۱) اور (۲) پر استعمال کر سکتے ہیں۔

متتم تفاعل ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

ل لا + م ما + ز لا = (۳)

م لا + ح ما + س ما = (۴)

فرض کرو کہ لا = ل قو، ما = ح پ قو جہاں ل اور ح مستقل ہیں، (۳) اور (۴) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

ل ل + ز ل + م ل + ح ل = (۵)

م ل + ل ل + ح ل + س ل = (۶)

یہ مساواتیں $لا + ک + ما + ج = لا = ۰$ ، $ما - ک - لا + ج = ما = ۰$ ۔
گردشی رتاقص کے لنگر کی چھوٹی حرکتوں کو تعبیر کرتی ہیں (گردش نما کا محور
تعویق کی سمت میں ہے) نیز یہ زمبلین افشر (Zeeman effect)
کے نظریہ میں مقناطیسی میدان کے اندر برقیہ کی حرکت کی ابتدائی مساواتیں
ہیں [ملاحظہ ہو گیس کے کتاب مقناطیسیت اور برقیات حصہ اول
صفحہ ۵۶۵۔ اس کتاب کے دسویں باب میں کئی علم آموز مثالیں ملینگی]

مشق ۱

(۱-۱۶) تک کی مساواتوں کو تکمل کرو۔

۱- $(۱ + لا) عف = ما + ۱$

۲- $۱ - لا عف = ما - ۱$ ۳- $ما - لا عف = ما + ۳$

۴- $(لا + ما) عف = ما + ۲$ ۵- $لا عف = ما - ۲$ ۶- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۷- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۸- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۹- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۱۰- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۱۱- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۱۲- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۱۳- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۱۴- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۱۵- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۱۶- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۱۷- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۱۸- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۱۹- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۲۰- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۲۱- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۲۲- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۲۳- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۲۴- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۲۵- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۲۶- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۲۷- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۲۸- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

۲۹- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$ ۳۰- $(لا + ۱) عف = ما + ۱$

مساواتوں، آتا تک پورے تکملے اور نامہ مل (جہاں موجود ہوں) معلوم کرو۔

- ۱۷- (ما-ع لا) = ر ع + ب ۱۸- ما = ع لا + ع^۳
 ۱۹- لا (ما-ع لا) = ما ع^۲
 مساواتوں (۲۰ تا ۲۷) کو حل کرو

- ۲۰- عفا ما- (ا + ب) عفا ما + رب ما = .
 ۲۱- عفا ما- ۵ عفا ما + ۶ عفا ما = .
 ۲۲- عفا ما- ۶ عفا ما + ۱۰ ما = جب ۲ لا
 ۲۳- عفا ما- ۳ عفا ما + ۲ ما = فو^۲
 ۲۴- عفا ما + ن ما = ر جم ن لا + ب جب ن لا
 ۲۵- عفا ما- ن ما = ر فو^{ن لا} + ب فو^{ن لا}
 ۲۶- عفا ما- ۶ عفا ما + ۱۳ ما = لا
 ۲۷- عفا ما + ۲ عفا ما + ما = .
 ۲۸ تا ۳۱ تک کی ہمزاد مساواتوں کو تکمل کرو
 [لا = ۲ لا / وت]
 ۲۸- لا- ۷ لا + ما = .، ما- ۲ لا- ۵ ما = .
 ۲۹- لا + ما + ۲ لا + ما = .، ما + ۵ لا + ۳ ما = .
 ۳۰- لا + ۲ لا- ۳ ما = ت، ما- ۳ لا + ۲ ما = فو^ن
 ۳۱- لا- ۳ لا- ۴ ما = .، ما + لا + ما = .
 ۳۲- مساواتوں لا = .، ما = . ج کو تکمل کرو اور مستقلات کو معلوم کرو کہ
 یہ شرائط پورے ہوں لا = .، ما = . لا = ر جم عا، ما = ر جب عا جبکہ ت =
 ۳۳- مساواتوں لا = .، ما لا = .، ما کو تکمل کرو اور مستقلات
 معلوم کرو کہ یہ شرائط پورے ہوں لا = ر، ما = .، لا = .، ما = ب امہ جبکہ ت =
 ۳۴- مساوات لا = .، ما کو تکمل کرو اور ایسے مستقلات منتخب کرو کہ

لا = لا = جبکہ ت =
۳۵۔ مساوات خب عفا = و شہتیروں کی خمیدگی کے نظریہ میں
واقع ہوتی ہے، جب خمیدگی کی استواری ہے اور وزن ہے اگلی طول کا
ذیل کے شرائط کے ماتحت مساوات کو تکمل کرو

(۱) ما = عفا = جبکہ لا = اور جبکہ لا = ل

(۲) ما = عفا = جبکہ لا = اور جبکہ لا = ل

(۳) ما = عفا = جبکہ لا = اور عفا = عفا = جبکہ لا = ل

۳۶۔ ایک برق سے بھرے ہوئے کثف کی گنجائش ج ہے اس کی
تختیوں کو تار کے ذریعہ جس کی ذاتی امالیت ل ہے اور مزاحمت فراہم
لا دیا گیا ہے، اگر وقت ت پر تختیوں کے درمیان قوہ کافرق و ہونو
و مساوات ذیل کو پورا کریگا

ج ل و + ز ج و + و =

اور برقی روجما ہے۔ ج و ثابت کرو کہ ان بھرن اہتزازی

ہوگا اگر ج ز > ل اور مدت دوران ت

ت = $\frac{2\pi L}{v}$ / $\frac{L}{J} - Z$

اور قوہ کا کوکارتی گھاؤ ہے $\frac{Z}{L}$

۳۷۔ مساوات عفا + $\frac{2}{L}$ عفا + ن = کو تکمل کرو متغیر

مبتوع ما کو ع میں بدلنے سے جہاں ع = لا ما

پورا تکملہ معلوم کرو نیز قوہ تکملہ معلوم کرو جو محدود ہے جبکہ لا مائل بہ صفر ہو۔

۳۸۔ ثابت کرو کہ لا عفا + لا عفا + ب = کا پورا تکملہ

۳۸ = (لا + لا) جب لا جہاں لا، لا مساوات
 لا (لا - لا) + لا + لا = ب = کی اصلیں ہیں۔
 آزمائشی حل = لا اختیار کرو اور حسب دفعہ ۶۰ عمل کرو۔

۳۹۔ ان مساواتوں کو تکمیل کرو
 (۱) لا عفا + ما + عفا = ما = ۶ لا
 (۲) لا عفا + ما - لا عفا + ما + ۶ لا عفا - ما = ما = لا
 (۳) لا عفا + ما - ما = لا
 ۴۰۔ متغیر متبوع لا کو طہ میں بدلنے سے جہاں لا = طہ مساوات
 ذیل کو تکمیل کرو

لا عفا + ما + لا عفا + ما + ن = ما =
 مثال ۳۸ کی مساوات کے جواب میں لا کے لئے جو مساوات حاصل
 ہوتی ہے اسکی اصلیں نیچائی ہیں۔

۴۱۔ تکمیل کرو $\frac{فر}{فر} = \left(\frac{فر}{فر} + \frac{فر}{فر} \right) = ۰$ کو

۴۲۔ اس مساوات کو تکمیل کرو $\frac{فر}{فر} = \frac{فر}{فر} + \frac{فر}{فر} = ۰$

۴۳۔ اس مساوات سے عفا ما معلوم کرو

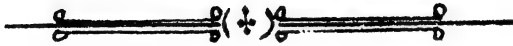
لا عفا + ما = ما { ۱ + (عفا + ما) }

۴۴۔ اگر ما = عو جہاں عو و دونوں لا کے تفاعل میں نو دکھاؤ گے

خطی مساوات عفا + ما + ف عفا + ما + ق = ما = ص (۱)

ہو جاتی ہے وع + (و + ف) + عو + (و + ف) + ق + و = ع = ص (۲)

جہاں زبریں لا، مشتقوں کو تعبیر کرتی ہیں۔
 اگر مساوات (۱) کا حل ہو جبکہ ϵ صفر ہو تو ϵ کی قیمت (اور اسلئے
 ϵ کی قیمت) دریافت ہو سکتی ہے کیونکہ اس حالت میں ϵ کا سر صفر ہے
 اور (۲) خطی مساوات ہے رتبہ اول کی جبکہ ϵ کو متغیر متنوع مانا جائے۔
 ۴۵۔ اس مساوات $\text{لا}^{\text{اعف}} \epsilon + \text{لا}^{\text{عف}} \epsilon - \epsilon = \text{لا}^{\text{نکو}} \epsilon$ رکھو
 $\epsilon = \text{لا}^{\text{ع}}$



باب نہم

محمد و تنکلی۔ علامت تنکمل کے اندر اعمال

۶۳۔ تنکملہ کا تسلسل۔ تنکمل کی تعریف سے کہ یہ ایک رقبہ کا

ناپ ہے (دفعات ۸۲ حصہ اول، ۲۲ حصہ دوم) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب تنکمل فار (لا) لا کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے تسلسل ہو تو تنکملہ

ی = کُ فار (لا) فرلا = کُ فار (ع) فرع (۱)

اپنی اوپر کی حد لا کا تسلسل تفاعل ہوتا ہے اور اس کا مشتق فار (لا) ہے۔

محمد و تنکملہ ہ = کُ فار (لا) درلا = کُ فار (لا) فرلا (۲)

اپنے حدود و ارب کا تفاعل ہے اور ہ کے مشتق بلحاظ ب اور لا کے

تنکملہ کی تعریف کی رو سے، بالترتیب یہ ہیں

فرہ = فار (ب) فرہ = فرہ = فرہ (۳)

لیکن جیسا کہ طبعی سوالات میں اکثر ہوتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۴۴ اور دفعہ

۶۹ مثال ۶ حصہ اول) کہ تنکمل میں کوئی محدود عدم تسلسل اس نمونہ کا جو شکل ۳۴ میں دکھایا گیا ہے لا کی قیمت مثلاً ۵ = ۶ = ۷ کے لئے ہوتا

دفعہ ۱ میں تکملہ کی تعریف کو وسعت دیکر ایسی صورتوں کو اس کی تعریف میں شامل کر لیا گیا ہے جہاں تکمیل میں لا انتہا عدم تسلسل ہو اور اس تعریف کی رو سے تکملہ تسلسل رہتا ہے۔ جب تکمیل میں لا انتہا عدم تسلسل ہو یا جب تکملہ کی ایک یا دونوں حدود لا انتہا ہی ہوں تو تکملہ کو اہم غیر واجب یا لا انتہا ہی تکملہ کہیں گے، اس باب کے خاص مضمون کی بحث شروع کرنے سے پہلے ہم غیر واجب تکملہ پر مختصر غور کر چکے، اس بحث میں باب پنجم کے تخيلات اور مصطلحات اکثر طور پر استعمال میں آئیں گے۔

۶۴۔ لا انتہا ہی حدود۔ جب، \leq اور لا کی ایسی قیمتوں کے لئے ف (لا) تسلسل ہو تو تعریف (دفعہ ۱) کی رو سے

ک ف (لا) فلا = نہا ک ف (لا) فلا = ہا ف (لا) (۱)
بشرطیکہ ∞ کے لئے یہ انتہا محدود ہو۔

اب دفعہ ۳۹ مسئلہ (۳) کی رو سے اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ ف (لا) ایک معین انتہائی طرف مائل ہو جبکہ لا مائل بہ لا انتہا ہی ہو یہ ہے کہ فرق ف (ج)۔ ف (ب) مائل بہ صفر ہو جبکہ ب اور ج کسی طرح سے بھی مائل بہ لا انتہا ہی ہوں۔ ایسی حالت میں

ف (ج)۔ ف (ب) = ک ف (لا) فلا۔ ک ف (لا) فلا = ک ف (لا) فلا (۲)

پس تحملہ (۱) کا وجود ہو گا اگر (۲) کے موخر اندک تکملہ کی انتہا کا وجود ہو جبکہ ب اور ج کسی طرح سے بھی مائل بہ لا انتہا ہی ہوں۔ جب اس انتہا کا وجود ہو تو تکملہ (۱) کو مستند کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر ف (لا) تسلسل ہو جبکہ لا \geq و تو تکملہ

ک فَا (لا) فرلا (۳)

مستحق ہوگا بشرطیکہ تکملہ

+ ک فَا (لا) فرلا (۴)

کی انتہا صفر ہو جبکہ مثبت عدد ب، ج کسی طریقہ سے بھی مائل بہ لاتنا ہی ہوں۔ جب تکملہ کے حدود - ∞ اور + ∞ ہوں تو تکملہ مستحق ہوتا ہے بشرطیکہ ذیل کے ہر ایک تکملہ

ک فَا (لا) فرلا اور ک فَا (لا) فرلا (۵)

کی انتہا صفر ہو جبکہ مثبت اعداد ب، ج، ب، ج کسی طریقہ سے بھی مائل بہ لاتنا ہی ہوں۔

ظاہر ہے کہ تکملہ (۱) کا استدقاق فَا (لا) کے رویہ پر منحصر ہے جبکہ لا کو بہت بڑی قیمتیں دی جائیں (مقابلہ کرو نوٹ دفعہ ۲۰ کے ساتھ) جب کسی صورت میں نامحدود تکملہ حاصل ہو سکے تو استدقاق کے متعلق باسانی فیصلہ ہو سکتا ہے، ذیل کا مسئلہ کارآمد ثابت ہوگا جبکہ محدود تکملہ حاصل نہ ہو سکے۔

مسئلہ۔ فرض کر دو کہ لا کی بڑی قیمتوں کے لئے مثلاً جبکہ لا < ع تفاعل

فَا (لا) اس شکل میں رکھا جاسکتا ہے $\frac{\text{فَا (لا)}}{\text{لا}}$ ۔ اگر لا کی ہر ایسی قیمت

کے لئے جو مثلاً ع سے بڑی ہو فَا (لا) تعداد کم ہو ایک محدود عدد (۱ سے) تو تکملہ (۱) مستحق ہوگا بشرطیکہ ک < لا لیکن اگر لا کی ہر ایسی

قیمت کے لئے جو E سے بڑی ہو فدا (لا) ایک مثبت عدد جب سے ہمیشہ بڑا رہے یا ہمیشہ ایک منفی عدد۔ J سے کم رہے (جب) اور J صفر نہیں ہیں) تو تکملہ (۱) مستحق نہیں ہوگا جبکہ $k \geq 1$ ثبوت باسانی دفعہ ۱۵ مسئلہ ۱ سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر صرف عددی

قیمتوں کو ملحوظ رکھا جائے اور فا (لا) $\langle \frac{1}{k} \text{ جبکہ لا } \rangle E$ تو

$$k \text{ فا (لا) فلا} \rangle k \frac{1}{k} \text{ فلا} = \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \text{ جبکہ لا}$$

جب k اور J مائل بہ لاتنا ہی ہوں تو یہ انتہا صفر ہوتی ہے اگر $k < 1$ اتنا کی صورت بھی اسی طرح ثابت ہوتی ہے۔ لاتنا ہی حدود کی اور صورتوں کے لئے بھی اسی طرح کا مسئلہ صادق آئیگا۔

مطلق اور مشروط استدقاق۔ کسی تکملہ کو مطلق طور پر مستحق کہا جائیگا اگر یہ اس صورت میں بھی مستحق رہے جبکہ تکمیل فا (لا) کی بجائے اسکی عددی قیمت فا (لا) رکھ دی جائے۔ اگر کوئی مستحق تکملہ تکمیل فا (لا) کی بجائے اسکی عددی قیمت فا (لا) رکھنے سے مستحق نہ رہے تو اسکو مستحق بالشرط کہینگے۔

مثال ۱۔ تکملہ $k \text{ جب لا فلا}$ کا استدقاق مشروط ہے۔ مسئلہ بالا اس صورت میں سیدھا نہیں لگ سکتا (اگرچہ تکمیل بالخصوص کے بعد ممکن ہے لگ سکے) لیکن مثال ۲۳ شق ۵ کی رو سے اگر $n \geq 1$ تو

$$k \text{ جب لا فلا} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-3} + \dots + \frac{1}{k-n} - \frac{1}{k-n-1} + \frac{1}{k-n-2} - \dots$$

۶۵۔ لامتناہی متکمل۔ اگر فار (۱) مسلسل ہو لا = ۱ + صبر (صبر)۔
 سے لا = ب تک لیکن فار (۱ + صبر) کی انتہا لامتناہی ہو جبکہ صبر مائل
 بہ صفر ہو تو (دفعہ ۱) کی رو سے

ف (لا) فرلا = نسا. ف (لا) فرلا = نسا ف (لا) فرلا = نسا
 (1)

بشرطیکہ یہ انتہا ایک معین مقدار ہو۔
 اب ف (لا) کی انتہا معین مقدار ہوگی اگر ف (لا + صہ)۔ ف (لا + صہ)
 صفر کی طرف مائل ہو جبکہ مثبت مقداریں صہ، صہ کسی طریقہ سے
 بھی مائل بہ صفر ہوں۔ پس تکملہ (۱) مستحق ہوگا اگر تکملہ

فادالا = ف (فارلا) فرلا - ف (فارلا) فرلا (۲)

مائل بہ صفر ہو جبکہ صہ، صہ کسی طریقہ سے بھی صفر کی طرف مائل ہو۔
 اسی طرح سے تنکملہ کے معنی اس صورت میں متعین ہو سکتے ہیں جبکہ
 فادالا) مائل بہ لاتناہی ہو جبکہ لا، ب کی طرف مستحق ہو یا قیمت ج
 کی طرف مستحق ہو جہاں ج، ا اور ب کے درمیان واقع ہے۔
 (دیکھو دفعہ ۱، نیز صفحہ ۴۴ کی مثال ۳)

مسئلہ۔ اگر $لا = ا = لا = ب$ تک شکس فا (لا) اس شکل کا $\frac{فما (لا)}{(لا - ا) ک}$
 کا ہو جہاں $فما (لا)$ مسلسل ہے $لا = ا = لا = ب$ تک تو مسئلہ (ا)
 مستحق ہوگا بشرطیکہ $ا > ۱$ لیکن جب $فما (ا)$ صرف نہ ہو
 مسئلہ مستحق نہیں ہوگا اگر $ا \leq ۱$ ۔

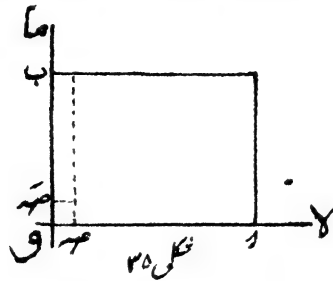
عدم تسلسل کی اور صورتوں کے لئے اسی طرح کا مسئلہ درست ہوگا ثبوت
 فوراً مسئلہ ۱۵ دفعہ ۱۵ سے حاصل ہوتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۱۵ کا آخری حصہ)
 مثال ۱۔ مسئلہ ۱۱ جب لا $\frac{1}{2}$ جس میں ب <۔ مستحق جہاں $\langle 2 \rangle$
 ہم کہہ سکتے ہیں فدا (لا) = $\frac{1}{2}$ جب لا، تشکیل اس صورت میں ہوگا

فدا (لا) پس تکمہ مستحق ہوگا اگر ر۔ $\langle 1 \rangle$ یا ر۔ $\langle 2 \rangle$ اگر ہم لیں فدا (لا) =
 جب (لا) تو یہ قید کہ فدا (۰) کو صفر نہیں ہونا چاہئے عائد ہوتی ہے۔
 مثال ۲۔ مسئلہ ۱۱ جب لا $\frac{1}{2}$ جس میں ب <۔ مستحق ہوگا اگر ر۔ $\langle 1 \rangle$

اس صورت میں فدا (لا) = جم لا۔
 دوسرے غیر واجب تکملوں کی بحث فدا زیادہ مشکل ہے۔ جب مشکل لاستناہی ہوتا
 ہو ایک یا زیادہ الگ الگ نقطوں پر یا کسی ایک سطحی کے ہر ایک نقطہ پر جو
 تکمیل کے رقبہ کے اندر یا اسکے حدود پر واقع ہو تو رقبہ کو ذرا سا بڑھ کر لینا چاہئے کہ
 ایسے نقطے رقبہ سے خارج ہو جائیں۔ اب چونکہ تشکیل اس نئے رقبہ پر تسلسل ہے
 اسلئے تشکیل کی قیمت اس پر محدود حاصل ہوگی اور یہ ممکن ہے کہ جب اس سلسلے
 ہوئے رقبہ کو توسیع دیکر اصلی رقبہ پر انتہا میں منطبق کیا جائے تو اس محدود قیمت
 تکمیل کی انتہا ایک معین مقدار ہو اگر ایسا ہو تو اس انتہا کو ہم اصلی تشکیل کی قیمت
 تسلیم کرینگے۔ ذیل میں ہم دو مثالیں درج کرتے ہیں، ایسے تکملوں کی مفصل بحث
 اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

مثال ۳۔ $\frac{1}{2}$ فدا (لا) جب لا $\frac{1}{2}$ جب لا، 'ب' 'پ' 'ق' سب مثبت ہیں
 لا = ۱۵ = ۱۵۔ پر تشکیل لاستناہی ہے، لیکن رقبہ تسلسل کے کسی اور نقطہ پر لاستناہی
 نہیں ہے پس یہ اس کے پاس ایک چھوٹا مستطیل بنانے سے جسکے ضلع ۱۵، ۱۵

ہیں ہم مبداء کو رقبہ مکمل سے خارج کر دیتے ہیں۔ اس نئے رقبہ پر تکمل کی قیمت حسب ذیل (شکل ۳۵)



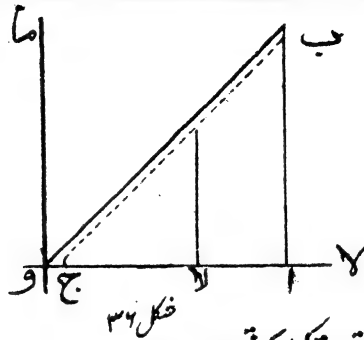
$$\frac{\text{فرما}^2}{\text{پ}^2 + \text{لا}^2} + \frac{\text{فرما}^2}{\text{پ}^2 + \text{لا}^2}$$

$$= \frac{1}{(\text{ن} - ۱)(\text{ن} - ۲) + \text{پ}^2} \{ (\text{پ} + \text{ق} + \text{ب})^2 - (\text{پ} - \text{ق} - \text{ب})^2 - (\text{ق} - \text{ب})^2 - ۲ \}$$

اگر > ۲ تو یہ جملہ ایک معین انتہائی طرف مستقیم ہوتا ہے جبکہ صہ، صہ کسی طور بھی صفر کی طرف مائل ہوں۔ اگر $= ۲$ تو تکمل میں کو کار تم شریک ہوتے ہیں جو معین انتہائی طرف مائل نہیں ہوتے۔ اگر < ۲ تو یہ جملہ الاستنباهی ہو جاتا ہے۔ پس دیا ہوا تکمل مستقیم ہے اگر > ۲ ۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر تکمل فدا (لا، ما) ہوتا جہاں فدا (لا، ما) مسلسل ہے تو بھی یہ تکمل مستقیم ہوتا۔

$$\text{مثال ۴۔} \quad \frac{\text{فرما}^2}{\text{پ}^2 + \text{لا}^2} \text{ جہاں } \text{ن} < ۲$$

تکمل کا رقبہ ثلث متساوی الساقین و (ب) (شکل ۳۶) ہے
و $= ۱ = ۱$ (ب)۔ شکل الاستنباهی ہے خط و ب کے ہر ایک نقطہ پر
اس لئے ہم و ب کے متوازی اور و (پرمود وار نقطہ دار خط کھینچنے
سے خط و ب کو خارج کر دیتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ و ب کے متوازی خط پر
معین لا۔ صہ ہے اور و ج = ما



اس سکتے ہوئے رقبہ پر تکملہ کی قیمت ہے

$$\frac{1}{2} \times (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

اگر $n > 1$ اور صرف اسی صورت میں جبکہ $n > 1$ اس جگہ کی انتہا ایک معین مقدار ہوگی جبکہ حصہ 'ح' بلا واسطہ صفر کی طرف مائل ہوں۔ پس دیا ہوا تکملہ اور اسی طرح سے تکملہ $\frac{1}{2} \times (1 + 2 + \dots + n)$ جہاں n تمام رقبہ 'ح' کے اندر سلسلہ ہوسدق ہوگا اگر $n > 1$ ۔

۶۶۔ دو مشہور تکمیلے۔ ذیل میں جب n کے جو جملہ دیا گیا ہے اس کے ثبوت کے لئے طالب علم دیکھے کہ سٹل کا جبر و مقابلہ حصہ دوم تیسواں باب دفعہ ۱۰ یا ہا بسن کی کتاب علم مثلث دفعہ ۲۹۵۔ لا کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے سوائے صفر اور n کے جہاں n مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)^k) = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)^k) = \frac{1}{n} \dots \dots \dots (1)$$

(۱) میں فرض کرو کہ $n = 1$ جہاں n کسر واجب ہے۔ تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{1} = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \left(\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} \right)^k) \dots \dots \dots (2)$$

$$= \left\{ \frac{1}{(1-k)} + \frac{1}{(k+1)} \right\} \frac{1}{(k+1)} \text{ جب } e \text{ فرع}$$

 یہ مفروضہ جائز ہے، کیونکہ یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ موخر الذکر شکل
 یکساں طور پر مستند سلسلہ ہے۔

نتیجہ صریح $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{ جب } n \rightarrow \infty$ فرلا = $\frac{1}{2}$ اگر $1 <$

$= \frac{1}{2}$ اگر $1 >$

$= 1$ اگر $1 =$

اگر $1 <$ ۔ تو اب بال $1 =$ فاک کے ذریعہ تکملہ وہی ہو جاتا ہے جو اوپر حاصل
 کیا گیا۔
 اگر $1 >$ ۔ تو تکملہ مساوی ہے

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{ جب } n \rightarrow \infty \text{ فرلا} = -\frac{1}{2}$$

جہاں $1 =$ ۔ مثبت مقدار۔ اگر $1 =$ ۔ تو شکل کا ہر جزو صفر ہو گا اسلئے
 تکملہ صفر ہے۔ اس لئے تکملہ 1 کا غیر مسلسل تفاعل ہے۔

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{ جب } n \rightarrow \infty$ اگر $1 > e > 1$

شکل کو ان شکلوں میں لکھا جاسکتا ہے

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \text{ کے نزدیک } 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \text{ کے نزدیک}$$

اسلئے استنتاج کے لئے ضروری ہے کہ $1 > e > 1$
 تکملہ کو اگر ت سے تعبیر کریں تو

$$ت = \int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx + \int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx$$

دوسرے تکملہ میں رکھو لا = $\frac{1}{x}$ تو حاصل ہوگا

$$\int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx$$

$$پس ت = \int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx$$

$$اب \frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^k}$$

$$لیکن \int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x} dx + \int_1^{\infty} \frac{-x^{-1}}{1+x} dx$$

$$پس ت = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^k}$$

جیسے ن لا تناہی کی طرف مائل ہوتا ہے سو خالذ کر تکملہ صفر کی طرف متق

ہوتا ہے کیونکہ یہ کم ہے ذیل کے تکملہ سے

$$\int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1-x^{-1}}{1+x} dx$$

$$اسلئے ت = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{x^k}$$

پیدا تفاعلوں کو گافا تفاعلوں کی رقوم میں بیان کرنے سے اوپر یہ ملحوظ رکھنے سے کہ جہاں $(\frac{1}{p}) = \frac{1}{p}$ ہمیں مساوات ب حاصل ہوتی ہے۔

۶۸۔ اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ۔ مشق ۵، مسئلہ ۳، ۳۱

میں اس مسئلہ کا حوالہ دیا گیا ہے۔ چونکہ محدود تکملوں کی بحث میں یہ اس کی اہمیت رکھتا ہے، اس لئے اب ہم اسے ثابت کرینگے۔ یہاں پر چند الفاظ ایسے تفاعل کے متعلق بیان کر دینا مناسب ہوگا جو اپنی وجہ یا دلیل کے بڑھنے سے یا تو کبھی نہیں گھٹتا یا کبھی نہیں بڑھتا۔ ایسے تفاعل کو ہم یک رنگ (Monotonic) کہینگے۔ اس مسئلہ کا ثبوت ذیل کے سادہ سے تمہید پر منحصر ہے جسے ایبل کی لاتساوی کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔

تھیل یہاں اگر درکی تمام قیمتوں کے لئے جون کے مساوی ہوں یا اس کم ہوں جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

$$1 < e_1 + e_2 + \dots + e_n + e_{n+1} < b$$

جہاں e_1, e_2, \dots, e_n کوئی حقیقی مقداریں ہیں اور اگر e_1, e_2, \dots, e_n مثبت مقدار کا نہ بڑھنے والا تواتر ہو تو

$$1 < e_1 + e_2 + \dots + e_n + e_{n+1} < b$$

اعداد e_1, e_2, \dots, e_n ایک نہ بڑھنے والا تواتر بنائینگے اگر اس کا ہر ایک عدد اپنے بعد کے عدد سے بڑا ہو یا اس کے مساوی ہو۔ اسی طرح نہ گھٹنے والا تواتر وہ ہوگا جس میں کا ہر ایک عدد اپنے بعد کے عدد کی نسبت کم ہو یا اس کے مساوی ہو۔ اس تمہید کو ثابت کرنے کے لئے فرض کر دو کہ

$$s_1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n + e_{n+1} < b$$

$$e_1 = s_1, e_2 = s_2 - s_1, e_3 = s_3 - s_2, \dots, e_n = s_n - s_{n-1}, e_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

اور تشاکل کی خاطر فرض کرو کہ $و = لا$ ، $ب = لا$ ، تب

$$\sum_{r=1}^n \{ فدا (لا) سدا (لا) فرلا \} = \sum_{r=1}^n \{ فدا (لا) سدا (لا) فرلا \} \dots (۱)$$

وقفہ $(لا، لا)$ میں $فدا (لا)$ کی بجائے $فدا (لا، لا)$ ، $سدا (لا، لا)$ ، $فرلا (لا، لا)$ رکھو اور $لا$ سے $لا$ تک کے اس تکملہ کو بطور دو تکملوں کے فرق کے مساوی لکھو۔ اس طرح

$$\sum_{r=1}^n \{ فدا (لا) سدا (لا) فرلا \} = \sum_{r=1}^n \{ فدا (لا، لا) سدا (لا، لا) فرلا \} \dots (۲)$$

$$\sum_{r=1}^n \{ فدا (لا، لا) سدا (لا، لا) فرلا \} = \sum_{r=1}^n \{ فدا (لا، لا، لا) سدا (لا، لا، لا) فرلا \} \dots (۳)$$

تہبیدیہ میں فرض کرو کہ $و = فدا (لا، لا)$ اور

$$ع = \sum_{r=1}^n \{ سدا (لا) فرلا \} = \sum_{r=1}^n \{ سدا (لا) فرلا \}$$

تکملہ $\sum_{r=1}^n \{ سدا (لا) فرلا \}$ سے $و = لا$ ، $ب = لا$ تک مسلسل تفاعل ہے،

اس لئے اس صورت میں تہبیدیہ کی اوسط قیمت ط وقفہ $(و، ب)$ کے اندر $لا$ کی کسی قیمت (یا قیمتوں) کے جواب میں اس تکملہ کی ایک قیمت ہے۔ فرض کرو کہ $لا$ کی ایسی ایک قیمت ضابطہ ہے جہاں $و \geq ص$ ، $ب \geq تب$ (۲) کے بائیں جانب کے رکن میں پہلا

$$\frac{\text{کے جم والا}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}} \times \text{جم والا لا} + \frac{1}{\text{کے لا}} \times \text{جم والا لا}$$

$$\frac{\text{جم والا لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{جم والا لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{جم والا لا}}{\text{کے لا}}$$

اسلئے یہ تعداد ادا کم ہے $\frac{2}{\text{لا}} + \frac{2}{\text{کے لا}}$ سے۔ پس اگر $\text{لا} < \text{کے لا}$ تو وہ اور کم کے لامتناہی کی طرف مائل ہونے سے یہ انتہا صفر ہوتی ہے۔ اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مستحق ہے۔ مثال ۲۔ مشق ۱۲ سوالات ۱۴، ۱۵ کو ثابت کرنے کے لئے ایبل کی لاتساوی استعمال کرو۔ سوال ۱۴ کو لو۔ فرض کرو کہ

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \quad \text{جم (ن+ع) طہ}$$

ایبل کی لاتساوی میں فرض کرو کہ $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n}$ جم (ن+ر) طہ

$$\text{تب س} = \text{جم} \frac{1}{n} \text{ جب } \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \text{ جب } \frac{1}{n}$$

اگر طہ صفر نہ ہو اور نہ ہی یہ $\frac{1}{n}$ کا ضعف ہو تو س، ر کی ہر قیمت کے لئے محدود ہوتا ہے مثلاً فرض کرو کہ اس کم ہے ج سے۔ اسلئے $\frac{1}{n}$ کم ہے $\frac{1}{n+1}$ سے اور جب $\frac{1}{n}$ لامتناہی کی طرف مائل ہو تو ع کی ہر قیمت کے لئے یہ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے۔ پس سلسلہ مجوزہ مستحق ہے۔

مشق ۱۸

۱۔ اگر $\frac{1}{a}$ اور $\frac{1}{b}$ دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ مکملہ

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}$$

مساوی ہے $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ کے اگر $\frac{1}{a}$ بڑا ہو $\frac{1}{b}$ سے اور صفر کے مساوی ہے اگر $\frac{1}{a}$ چھوٹا ہو $\frac{1}{b}$ سے اور یہ مکملہ $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ مساوی ہے اگر $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

۲۔ ثابت کرو کہ (۱) $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{abc}{ab+bc+ca}$ (۲) $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = \frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd}$

۳۔ ذیل کے تخمینات کو مرشم کرو

$$(۱) \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = \frac{abcd}{abc+abd+acd+bcd}$$

۴۔ اگر n مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{a^n b^n c^n d^n e^n f^n g^n h^n i^n j^n k^n l^n m^n n^n}{a^n b^n c^n d^n e^n f^n g^n h^n i^n j^n k^n l^n m^n n^n}$$

۵۔ اگر $0 < a < b < c$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} > \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

دفعہ ۶۶ (ب) کے موافق عمل کرو اور ذیل کا نتیجہ استعمال کرو [دفعہ ۴۸، مثال (۵)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = 1$$

۶۔ ذیل کی مساواتیں قائم کرو۔ یہ سب دفعہ ۶۶، (ب) کے استحالہ سے حاصل

ہوتی ہیں یا مثال (۵) سے۔

$$(۱) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جب } 0 < x < \infty$$

$$(۲) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جب } 0 < x < \infty$$

$$(۳) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جب } 0 < x < \infty$$

$$(۴) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جب } 0 < x < \infty$$

$$(۵) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جب } 0 < x < \infty$$

$$(۶) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جب } 0 < x < \infty$$

۷۔ ثابت کرو کہ اگر $e > 1$ تو

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جب } 0 < x < \infty$$

۸۔ ثابت کرو کہ [ملاحظہ ہو دفعہ ۳، مثال ۲ (۶)]

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جب } 0 < x < \infty$$

۹۔ اگر n مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ [ملاحظہ ہو مثال ۶، مشق ۸]

کے لا لوک (جب لا) فلا = ن لا لوک (۱/۲)
اشک۔ آتا۔ مناسب ابدالوں سے گامات فاعلوں میں تحویل ہو سکتی ہیں۔

$$-۱۰ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} \quad \text{ن جب ن}$$

$$-۱۱ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} \quad \text{ن جب ن}$$

$$-۱۲ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} \quad \text{ن جب ن}$$

$$-۱۳ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} \quad \text{ن جب ن}$$

$$-۱۴ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} \quad \text{ن جب ن}$$

$$-۱۵ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} \quad \text{ن جب ن}$$

$$-۱۶ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} \quad \text{ن جب ن}$$

$$-۱۷ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}}} \quad \text{ن جب ن}$$

$$۱۸ - \int_{-1}^{+1} \frac{(1+y)^{1-4} (1-y)^{1-0}}{(1+y)^{1-0} (1-y)^{1-0}} dy = \frac{1}{2} \quad \text{یا } (م) \quad (۱)$$

۱۹ - اگر ذیل کا ہر ایک تکملہ (۱ < ۰)

$$پ = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \right) \log \frac{1}{y} dy = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \right) dy = \int_{-1}^{+1} \frac{2}{y} dy$$

ستدق ہو تو ثابت کرو کہ پ = ق لوگ ۱

۲۰ - ذیل کے منحنی کو مرتبہ (۱ < ۰)

$$ما = \int_{-1}^{+1} \frac{y^3 \log y}{y^3 \log y} dy$$

۶۹ - علامت تکمل کے اندر اعمال - فرض کرو کہ فا (لا، ما)

دو متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل تفاعل ہے ان دو دستوں کے اندر

$$۱ \geq لا \geq ب، ۱ \geq ما \geq ب \dots (س)$$

تو تفاعل ف (ما) جسکی تعیین اس تکملہ سے ہوتی ہے

$$ف (ما) = \int_{-1}^{+1} فا (لا، ما) dy \dots (۱)$$

ما کا ایک مسلسل تفاعل ہوگا [ملاحظہ ہو حسب ذیل]
 مسلسل تفاعلوں کی ایک خاصیت جو ہم نے ہمیشہ ضمنی طور پر تسلیم کر لی ہے
 یعنی یکساں مسلسل وہ اس مسئلہ اور دیگر مسائل کے ثبوت میں خاص
 حصہ رکھتی ہے۔ اگر دستوں (س) میں لا، ما قیمتوں کا کوئی جوڑا ہو تو مسلسل
 کی ابتدائی تعریف کی رو سے (دفعہ ۸۹ اور ۳۵ حصہ اول) ہم ہمیشہ ایک
 مثبت عدد عا ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ فرق
 افا (لا، ما) - فا (لا، ما) (۲)

دی ہوئی مقدار ضہ سے کم ہو (جہاں ضہ کا مفہوم حسب معمول ہے) جبکہ لا۔ لا۔ اور ابا۔ ما۔ میں سے ہر ایک عا سے کم ہو۔ اگر لا، ما کی بجائے قیمتوں کا اور جوڑا لا، ما کیا جائے تو بالعموم ہمیں عا کی ایک اور نئی قیمت منتخب کرنا ہوگی۔ اب فار لا، ما کے یکساں تسلسل کا یہ مفہوم ہے (مقابلہ کرو دفعہ ۲۴ کے ساتھ) کہ جب ضہ مقرر کر لیا جائے تو ہمیشہ ایک عا معلوم ہو سکتا ہے اس طور پر کہ فرق (۲) ضہ سے کم ہو بشرطیکہ لا۔ لا۔ اور ابا۔ ما میں سے ہر ایک عا سے کم ہو خواہ جوڑا لا، ما کسی طور پر بھی منتخب کیا جائے۔

[جب، لا = ابا اور ما = ابا کے تو جو ضروری تریسات عمل میں لانا چاہیں ہم انہیں طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔]

یہ ہم مان لینے کے تسلسل یکساں ہے۔
ف (ما) کا تسلسل ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں۔ کیونکہ

ف (ما + ہ) = ف (ما) = ف (فار لا + ما + ہ) = فار لا (ما) + ہ (۳)

خواہ لا کی وقفہ (ا ب) کے اندر کوئی سی قیمت ہو ہم ہ کو ہمیشہ اس قدر چھوڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ فار لا + ما + ہ = فار لا (ما) + ہ صحت کم ہو اور اسلئے ا ف (ما + ہ) = ف (ما) + صہ ا ب = ا ب سے ظاہر ہے کہ ف (ما) مسلسل ہے اور یہ مالی ہر ایک قیمت کے لئے مسلسل ہے وقفہ (ا ب) کے درمیان۔

اب ہم ذیل کا مسئلہ ثابت کرتے ہیں، ا ب، ما پر منحصر نہیں۔
مسئلہ ۱۔ اگر فار لا، ما اور ا ب کا جزوی مشتق فار لا، ما، و مشتقوں (س) کے اندر بے تعلق متضروں (لا، ما) کے مسلسل تفاعل ہوں تو تفاعل ف (ما) کا مشتق ف (ما) جس کی تعیین (۱) سے

ہوتی ہے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا

$$ف (ما) = \frac{جف فا (لا، ما)}{جف ما} \text{ مثلا } \dots (۴)$$

یہ مسئلہ ”علاست تکمل کے اندر تفرق“ کے نام سے موسوم ہے اور متغیر ما کو بعض اوقات متبذل کہا جاتا ہے۔

دفعہ ۳۷ حصہ اول کے مسئلہ اوسط قیمت کی رو سے

$$فا (لا، ما + ہ) - فا (لا، ما) = ہ فا (لا، ما)$$

$$= ہ فا (لا، ما) + ہ فا (لا، ما) - فا (لا، ما) \{$$

جہاں ما کوئی ایک قیمت ہے ما اور ما + ہ کے درمیان۔

(۳) میں مندرج کرنے اور ہ پر تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں

$$ف (ما + ہ) - ف (ما) = \frac{ج فا (لا، ما) \{ فا (لا، ما) - فا (لا، ما) \}}{ہ}$$

(۵)

لیکن ہ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے $فا (لا، ما) - فا (لا، ما)$ کو استفادہ کم کیا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں خواہ دفعہ (۱) کے اندر لا کی کوئی قیمت اس لئے (۵) میں آخری تکملہ ہ کے ساتھ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے اور ہمیں مساوات (۴) حاصل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ ۱ اور ب دونوں ما کے مسلسل تفاعل ہیں مسئلہ (۱)

کے شرائط برقرار ہیں اور $\frac{جف فا}{جف ما}$ ، $\frac{جف فب}{جف ما}$ مسلسل ہیں۔ تو ف (ما)

کا پورا مشتق (دفعہ ۹۰ حصہ اول) کی رو سے ہے

$$\frac{جف فب}{جف ما} = \frac{جف فب}{جف ما} + \frac{جف فب}{جف ما} + \frac{جف فب}{جف ما}$$

$$= -\text{فار'ما} \frac{\text{فر'ما}}{\text{فر'ما}} + \text{فار'ب'ما} \frac{\text{فر'ب'ما}}{\text{فر'ما}} + \text{جف'ما} \frac{\text{جف'ما}}{\text{جف'ما}} \dots (7)$$

جہاں $\frac{\text{جفاف}}{\text{جف}}$ ، $\frac{\text{جفاف}}{\text{جف}}$ دفعہ ۶۳ (۳) کے موافق معلوم کئے

گئے ہیں اور $\frac{\text{جف}}{\text{حف}}$ اوپر کے تکملہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے۔

ذیل کا مسئلہ دفعہ ۲۶ میں ثابت کیا گیا ہے لیکن اُس دفعہ کے تخیلات سے علاوہ اسے قائم کرنا علم آموز ہوگا۔

مسئلہ ۲۔ اگر فاعل (لا، ما) متبوع متغیروں لا، فاعل کا سلسلہ تفاعل ہو
سختوں (ص) میں اور اگر

فصل (لا، ما) = جُزْءُ مَرْدٍ جُزْءُ فَا (ع، و) مَرَع (ع)

$$\text{تو} \quad \frac{\text{جف}^{\text{ف}} \text{فد}}{\text{جف}^{\text{لا}} \text{جف}^{\text{ما}}} = \text{فا}^{\text{لا}} \text{ما}^{\text{لا}} = \frac{\text{جف}^{\text{ف}} \text{فد}}{\text{جف}^{\text{ما}} \text{جف}^{\text{لا}}} \dots\dots (۱)$$

اور ذیل کے تنگلے ایک دوسرے کے مساوی ہیں

ف = كَرَّمَا كَرَّ فَا (لا، ما) وَلَا، ق = كَرَّرَ كَرَّ فَا (لا، ما) فَرَمَّا

(9)

دوسرے تیکہ 'ف' ق دراصل مکمل ریاستوں کے متواتر تیکہ ہیں جیسا کہ (۸) میں
کے مشق متواتر ہیں۔ دفعہ ۲۶ کے نتائج کو نہیں استعمال کیا جائیگا۔

فرض کرو کہ سارا (ا) = ک (ف) (ع) (و) مرع (ف) (لا) (ما) = ک (س) (ا) (لا) (و) (م) (و)
تب سارا (لا) (و) مسلسل ہے اور

جف فہ = جف
جف ما = جف ما

(۱۰) میں جو مسئلہ مضبوط ہے اسے "علامت تکمیل کے اندر تکمیل" کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔

یہ ٹھیک طور پر پیش نظر ہے کہ اس تمام دفعہ میں اعداد 'ا'، 'ب'، 'د'، 'ب' محدود ہیں۔ ذیل کی مثالوں سے جن طریقوں کی توضیح ہوتی ہے وہ تکمیلوں کے حل میں اکثر مفید ثابت ہوتے ہیں۔ اور مثالیں بعد میں دی جائیگی۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{(1+2+3)} \times \frac{1}{2}$ کی قیمت معلوم کرو
اس مساوات پر غور کرو

جی $\frac{1}{(1+2+3)} = \frac{1}{6}$ سے $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ کو متبدل مان کر ہم بلحاظ ۱ کے تفرق کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{(1+2+3)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{(1+2+3)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

اد پر کی قیمت $\frac{1}{(1+2+3)}$ کے اس تکمیل کی قیمت ہے جو صفر ہوتا

جیکہ $0 = 1$ ، $\frac{1}{(1+2+3)}$ کو تکمیل کا متغیر صرف اس لئے مانا گیا ہے کہ عمل صراحت سے پیش ہو سکے لیکن نامحدود تکمیل کے حاصل کرنے میں متغیر کو بدلنے کی ضرورت نہیں ہوگی۔

مثال ۲۔ $\frac{1}{(1+2+3)} \times \frac{1}{2}$ کو (۱۔ ۲) جب (۱) کو محسوب کر دیا $1 > 1$

تکملہ کو $\frac{1}{2}$ سے تعبیر کرو اور اسے بلحاظ ۲ کے تفرق کرو

$$\frac{\text{وز}}{\text{وز}} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \text{زاجب}^2}{1 - \text{زاجب}^2} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} 1 d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}$$

ابدال و = مم لا کے ذریعہ اوپر کا تکرار فوراً حاصل ہوتا ہے، اس طرح

$$\frac{\pi}{\pi-1} - \frac{\pi}{2} = \frac{6}{2}$$

بلحاظ زرے تکمیل کرنے اور یہ ملحوظ رکھنے سے کہ $\phi = 0$ ۔ جبکہ $Z = 0$ ۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \frac{5-1}{2} + 1 \right\} \pi = 6 \text{ لوک}$$

یہ سلسلہ مسلسل رہتا ہے بشمول $z=1$ ، $z=0$ کے مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\int \frac{1}{x^p} \text{ لوک (جیم لا) فرلا} = \frac{1}{p} \int \frac{1}{x} \text{ لوک (جب لا) فرلا}$$

۷۔ نیمکلوں کا یکساں استدقاق۔ جب تکلمہ (۱) دفعہ ۶۹ کی

حدب (یا ا) لانتھا ہو تو اس دفعہ کے مسائل کی مزید تحقیق لازم آتی ہے۔ جو بحث ذیل میں درج ہے اس میں ہم نے بالکل وہی طریق عمل اختیار کیا ہے جو (Ch. J. de la Vallee Poussin) نے اپنے مکتوب میں دیا ہے۔

**Etude des integrales a limites, infinies (Annales de la
societe Scientifique de Bruxelles Vol 16 (1891-2) pp 150-180)**

نیز پروفیسر اوسگوڈ کے ایک مضمون کا بھی یہاں حوالہ دیا جاتا ہے

(Problems in Infinite Series and Definite Integrals) (Annals)

of Math (2nd Series) (Vol 3 pp 129-146)

طالب علم ذیل کی بحث کو دفعات ۴۲، ۴۶ کے ساتھ مقابلہ کرے۔
مختلف مسئلوں کے قیام کے لئے جو شرائط بیان کئے گئے ہیں وہ محض
کافی ہیں ضروری نہیں۔

نوٹ۔ جب تک کہ اسکے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے شکل
جو بالعموم فا (لا، ما) سے تعبیر ہوگا دو بے تعلق متغیروں (لا، ما) کا
ان کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے مسلسل تفاعل خیال کیا جائیگا۔
دفعہ ۱۸ (ب) سے بالعموم بند دفعہ ۴۵ حصہ اول اگر اس کے
خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے۔ علامت صہ سے اختیاری
چھوٹی مثبت مقدار تعبیر ہوگی۔ اگر ان قدر دادوں کو ملحوظ رکھا جائے
تو بہت سے تکرار سے باہر بچ جائینگے۔

تعریف۔ تکملہ \int فا (لا، ما) در لا (ا)

تمام وسعت $\int \geq$ ما \int ب میں یکساں طور پر مستحق کہلاتا ہے اگر
صہ کے دئے جانے کی صورت میں ایک ایسا عدد معلوم کر لینا
مکن ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور ب کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو صہ بڑی ہو

\int فا (لا، ما) در لا | > صہ (ب)

ذیل کے اشارے مفید ہونگے۔ اگر تکملہ (ا) محض مستحق ہو تو دراصل
مقرر ہو سکتا ہے کہ لا سا دی (ب) پوری ہو جبکہ ب \leq م لیکن عام
طور پر صرف صہ پر ہی منحصر نہیں ہوگا بلکہ ما پر بھی۔ اگر صرف
صہ کا تفاعل ہو جبکہ $\int \geq$ ما \int ب تو تکملہ (ا) دفعہ (ا، ب)
میں یکساں طور پر مستحق ہوگا۔

ایسا ہو سکتا ہے کہ صرف صہ کا تفاعل ہو مآ کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو \leq ایسی صورت میں تکملہ (۱) بلاحد وقفہ مآ \leq و میں یکساں طور پر مستحق ہوگا۔ لیکن یہ بھی ممکن ہے کہ صرف صہ کا تفاعل ہو خواہ کوئی معین قیمت (جو کتنی بڑی ہو سکتی ہے) ب کو دی جائے اور ساتھ ہی ہر قیمت مآ \leq کے لئے یہ صرف صہ کا تفاعل نہ ہو، مآ اس صورت میں ب کے ساتھ لاتنا ہی کی طرف جاسکتا ہے، استدقاق اس لئے لاتنا مست یا بلی ہوگا (مقابلہ کرو دفعہ ۴ کے ساتھ) ایسی حالت میں اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستحق ہے اختیاری وقفہ (۱) میں۔

تکملہ ۱) تو مآ \leq فرلا یکساں طور پر مستحق ہے بے حدود وقفہ مآ \leq ۔

میں لیکن تکملہ ۱) تو مآ \leq فرلا یکساں طور پر مستحق ہے صرف ایک اختیاری وقفہ۔ \leq مآ \geq ب میں جہاں ب کوئی معین عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی بڑا ہو۔

مسئلہ۔ تکملہ (۱) تمام وقفہ (۱) کے اندر یکساں طور پر مستحق ہوگا اگر ایک ایسے تفاعل فدا (۱) کا وجود ہو جو مآ پر منحصر نہ ہو اور ایسا ہو کہ \leq مآ \geq ب کے لئے

(ع) فدا (۱) \leq جسکے لاء

(ب) افا (۱) مآ \geq فدا (۱) جسکے لاء

(ج) تکملہ ۱) فدا (۱) فرلا مستحق ہو۔

ثبوت آسان ہے۔

۱) فدا (۱) مآ \geq ۱) افا (۱) مآ \geq ۱) فدا (۱) فرلا

اور بشرط (جما) کی رو سے ہم کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں (جو ما پر منحصر نہیں) کہ اگر ∞ ہو تو مؤخر الذکر تکملہ صہ سے کم ہو۔
یہ مسئلہ دفعہ ۲۴ کے مسئلہ ۳ کا جواب ہے۔ وقفہ (ا، ب) محدود یا نامحدود ہو سکتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر تمام وقفہ (ا، ب) میں
فار (لا، ما) = ف (لا، سا) (لا، ما)

جہاں سا (لا، ما) محدود ہے اور ف (لا، سا) مطلق طور پر مستحق تو تکملہ (لا، یکساں طور پر مستحق ہوگا تمام وقفہ (ا، ب) میں۔
اگر اس (لا، ما) ∞ (مستقل) تو رکھو
فما (لا) = س (ا، ف) (لا) |

اور مسئلہ لگ سکتا ہے۔
نتیجہ صریح ۲۔ لکھو فار (لا، ما) = لا \times لا فار (لا، ما)۔ اگر لا فار (لا، ما) لا، ما کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے محدود ہو تو تکملہ (لا، یکساں طور پر مستحق ہوگا بشرطیکہ ∞ (دفعہ ۲۴)

مثال۔ جا (ما) = ف (لا، ما)۔ تمام اختیاری وقفہ (ا، ب) میں
یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے کیونکہ لا ∞ = لا (لا، ف) اور لا ∞ = لا

محدود ہے۔
اگر ∞ ∞ ∞ تو شکل خلی حد پر غیر مسلسل ہے لیکن شکل بالخصوص کے عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ

جا (ما) = $\frac{1}{a}$ ف (لا، ما) ف (لا، ما)

اور تین کلمہ تمام سمت \geq \leq ما \geq ب کے اندر یکساں طور پر مستحق ہے۔
نوٹ: ترقیم کا ماقابل کے لئے ج (ما) = (ج) \leq \geq
۱۔ تسلسل اور حدود۔ اب ہم چند مسائل پر بحث کریں گے۔
جو اساسی اہمیت رکھتے ہیں۔

مسئلہ ۱۔ اگر تکملہ

ف (ما) = \leq \geq فار (لا) \leq \geq لا

یکساں طور پر مستحق ہو تمام وسعت \leq \geq ما \geq ب میں تو اس تمام
وسعت میں یہ ما کا تسلسل تقابل ہو گا۔
ثبوت: مسئلہ ۱ دفعہ ۲م کے ثبوت کے مستفاد ہے اور طالب علم کے لئے
چھوڑا جاتا ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر سا (لا) تسلسل ہو جبکہ لا \leq \geq لا اور تکملہ

حت = \leq \geq سا (لا) \leq \geq لا

مستحق ہو تو ذیل کا تکملہ جبکہ ما \leq \geq لا

ف (ما) = \leq \geq قو^{لا} سا (لا) \leq \geq لا

مستحق ہو گا اور نہ یا ف (ما) = حت

چونکہ قو^{لا} گھٹنے والا تقابل ہے اسلئے جب کب مثبت ہو اور

ب \geq \leq ضا \geq ج

ج قو^{لا} سا (لا) \leq \geq قو^{لا} سا (لا) \leq \geq قو^{لا} سا (لا) \leq \geq ج
ج قو^{لا} سا (لا) \leq \geq قو^{لا} سا (لا) \leq \geq قو^{لا} سا (لا) \leq \geq ج

اجزائے ضربی قو^ب، قو^ب ماب محدود ہیں اور چونکہ تکملہ کت مستدق ہے اسلئے (۱) کے بائیں جانب کے دونوں تکملے صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں جیسے ب اور ج لائننا ہی کی طرف مائل ہوں۔ تکملہ ف (ما) اسلئے مستدق ہے (جیسا کہ اوپر طرح بھی ظاہر ہے)۔

اب فرض کرو کہ ج مائل بہ لائننا ہی ہوتا ہے اور ب محدود رہتا ہے۔ چونکہ قو^ب صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اسلئے (۱) سے ہم دیکھتے ہیں

$$ج^{\infty} قو^{\infty} سا (لا) ملا = قو^{\infty} ماب ج^{\infty} سا (لا) ملا \leq صا \leq ب$$

(۱) میں صا کی قیمت بالعموم ج کے ساتھ بدلیگی اور اس لئے

$$ف (ما) = ج^{\infty} قو^{\infty} سا (لا) ملا + قو^{\infty} ماب ج^{\infty} سا (لا) ملا \dots (۲)$$

$$اب لو کت = ج^{\infty} سا (لا) ملا + ج^{\infty} سا (لا) ملا \dots (۳)$$

$$پس ف (ما) - کت = ج^{\infty} قو^{\infty} سا (لا) ملا + قو^{\infty} ماب ج^{\infty} سا (لا) ملا$$

$$- ج^{\infty} سا (لا) ملا \dots (۴)$$

اب چونکہ کت مستدق ہے اور قو^ب محدود ہے اس لئے ہم ب کو اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ (۴) کے بائیں جانب کی دوسری اور تیسری رقمیں تعداد اتنی چھوٹی ہوں جتنا ہم چاہیں۔ ب کے لئے ایسا انتخاب کرو

اور اس کو اس قیمت پر ثابت رکھو۔ اب ما کو صفر کے اس قدر قریب لو کہ
(۴) کے بائیں جانب کا پہلا نمبر تعداد اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ پس
معلوم ہوا کہ ما کو صفر کے اتنا قریب لیا جاسکتا ہے کہ $f(a) = 0$ ۔ تا
اس قدر چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں، پس مسئلہ ثابت ہوا۔

مسئلہ مکملوں کی قیمتیں دریافت کرنے میں بڑا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اگلا
مسئلہ زیادہ عام ہے اور دوسرے مکملوں کی صورت میں خاص اہمیت
رکھتا ہے اگرچہ فی الحال اس پر سے سرسری طور پر گزر جانا کافی ہوگا۔

مسئلہ ۱۔ فرض کرو کہ $f(x)$ مسلسل تغاقل ہے لا، ما کا مستقون
 $\leq a$ اور $\leq b$ کے لئے۔ اگر (۱) تکملہ

سا (ما) = $f(a)$ (لا، ما) در لا

یکساں طور پر مستحق ہو ہر ما کے لئے جبکہ $\leq a$ اور اگر (۲) ما کے
مائل بہ لاتنا ہی ہونے سے $f(a)$ (لا، ما) یکساں طور پر مستحق ہو ایک
معیین انتہا $f(b)$ (لا) کی طرف ہر ایسے لا کے لئے جبکہ $a \leq b$
جہاں b کوئی دیا ہوا عدد ہو سکتا ہے (خواہ یہ کتنا بڑا ہو) تو

ہا $f(a)$ (لا، ما) در لا = $f(b)$ (لا، ما) در لا = $f(a)$ (لا، ما) [لا، ما] در لا
سب سے پہلے ہم ثابت کرتے ہیں کہ سا (ما) ایک معین انتہا کی طرف مائل
ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ما کی دو قیمتیں ما اور ما ہیں، تب

سا (ما) - سا (ما) = $f(a)$ (لا، ما) - $f(b)$ (لا، ما) + $f(b)$ (لا، ما) - $f(a)$ (لا، ما) در لا

(۵)

= $f(b) - f(a)$ (فرض کرو)
شرط (۱) کی رو سے ہم b کو اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ ما کی قیمتیں خواہ کچھ
ہوں تکملوں ۱ اور (۵) میں سے ہر ایک کی قیمت $f(b) - f(a)$ سے کم نہ ہو

ب کی ایسی قیمت منتخب کرو اور پھر اسے ثابت رکھو۔ شرط (۲) کی رو سے ہم ما کی قیمت اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ وقفہ (ا، ب) میں لا کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو فرق |ف (لا، کا)۔ ف (لا، کا) | کم ہو $\frac{ص}{۳}$ (ب۔ و) سے بشرطیکہ ہر دو ما، کا بڑے ہوں ما سے، محض یہ اس امر کے لئے شرط ہے کہ ف (لا، کا) یکساں طور پر ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ ما لا انتہا ہی کی طرف مائل ہو۔ اگر ما کا اس طور پر انتخاب کیا جائے تو $\frac{ص}{۳}$ کم ہوگا $\frac{ص}{۳}$ سے۔ پس اگر ما، کا بڑے ہوں ما سے تو فرق |سا (کا)۔ سا (ما) | کم ہوگا $\frac{ص}{۳}$ سے۔ دوسرے الفاظ میں جب ما لا انتہا ہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو سا (ما) ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے، اس انتہا کو ب سے تعبیر کرو۔
اب ہم ثابت کر چکے کہ

ب = ف (لا، فرلا)

ہم لکھتے ہیں (ب فی الحال غیر معین ہے)

ف (لا، فرلا) - ب = ف (لا، فرلا) - ف (لا، کا) { فرلا

+ [ف (لا، کا) فرلا - ف (لا، کا) فرلا] + [ف (لا، کا) فرلا - ف (لا، کا) فرلا]

= ع + ب + ج + د (مانو)

چونکہ سا (ما) کی انتہا ب ہے ہم ما کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ما بے ما تو ا جبا $\frac{ص}{۳}$ - شرط (۱) کی رو سے ہم ب کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ب < ب تو ا ببا $\frac{ص}{۳}$ خواہ ما کی کچھ ہی قیمت ہو۔ اس شرط کے تحت ب کی قیمت منتخب کر کے شرط (۲) کی رو سے

اہم ما کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ما < ما تو اعدا > صہ، پس اگر ما بڑا ہو ما اور صہ سے اور ب کوئی عدد ہو بڑا ب سے تو

ا ک فہ (لا) فرلا - چا | > صہ (۶)

چونکہ اس لائسادی میں ما شامل نہیں ہوتا ہم آسان عبارت میں اسے یوں بیان کر سکتے ہیں کہ خواہ صہ کس قدر چھوٹا ہو ب معلوم ہو سکتا ہے کہ اگر ب < ب تو لائسادی (۶) پوری ہوتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں یہ ب لائسادی کی طرف مائل ہوتا ہے مکملہ ک فہ (لا) فرلا مائل یہ چا ہوتا ہے۔ مسئلہ اس طرح ثابت ہوتا ہے۔

۷۲۔ علامت تکمیل کے اندر اعمال۔ اب ہم دفعہ ۶۹ کے مسئلوں کو وسعت دینگے، طالب علم کو نوٹ دفعہ ۷۰ کی طرف توجہ دلائی جاتی ہے۔
مسئلہ ۱۔ اگر مکملہ

ف (ما) = ک فہ (لا، ما) فرلا (۱)

یکساں طور پر مستند ہو پوری سمت و > ما > ب میں تو

ک فہ (ما) فرلا = ک فہ (لا، ما) فرلا = ک فہ (لا، ما) فرلا (۲)

جہاں ما کوئی معین عدد ہے وقفہ (و، ب) میں۔

جب تکمیل کے حدود محدود مستقل ہوں تو مکمل کی ترتیب کوئی بھی ہو سکتی ہے اس لئے

$\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$
 $\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$

فرض کر دو کہ ب مائل بہ لاتنا ہی ہوتا ہے، ثب

$\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$
 لیکن چونکہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے پورے وقفہ (رَبِّ) میں اس لئے ہم ہر منتخب کر سکتے ہیں (جو مائل پر منحصر نہ ہو) اور جبکہ ب مائل تو
 $\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$ اور
 اسلئے جیسے ب مائل بہ لاتنا ہی ہوتا ہے موزن الذکر تکملہ مائل چھضر ہوتا ہے

مسئلہ اس طرح ثابت ہوتا ہے۔
 یہ قابل توجہ ہے کہ علامت تکمیل کے اندر تکمیل کرنے سے جو نیا تکملہ
 ماقبل ہوتا ہے وہ خود سمعت $\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$ کے اندر یکساں طور پر
 مستحق ہے۔

اس مسئلہ کی توسیع مسئلہ (۱۲) دفعہ ۳ میں کی گئی ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر تھلمہ $\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$ اور یکساں طور پر مستحق
 ہو تمام سمعت $\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$ میں تو یہ تکملہ (۱) کا مشتق ہوگا۔
 کیونکہ اگر $\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$ جف $\frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما) = \frac{لا}{لا} \frac{فا}{لا} (ما)$

تو مسئلہ (۱) کی رو سے

ف (ما) = ف (لا) ج (ف) لا (ما) = ف (ما) ج (ف) لا (ما) = ف (ما) ج (ف) لا (ما)
يعني ف (ما) = ف (ما) - ف (لا)

فوراً حاصل ہوتی ہے۔ طالب علم ابدال و = لا۔ ب کی مدد سے
قیمت محسوب کرے۔ جیسے لا بڑھتا ہے صفر سے تک و بڑھتا
ہے۔ سے سے تک۔

مثال۔ = ج = فو لا ن۔ اجم ب لا و لا کی = فو لا ن۔ اجم ب لا و لا
جہاں ا۔ ب۔ ن۔۔۔
ذیل کے ابدال عمل میں لاؤ۔

۱۔ = رحم طہ، ب = رجب طہ جہاں۔ = طہ > طہ > طہ

رلا = ما، ک = د، = و (۱)

اس طرح تکملے یہ شکل اختیار کرتے ہیں

ع = ج = فو ما ن۔ اجم (ماجم طہ) و ما

و = ج = فو ما ن۔ اجم (ماجم طہ) و ما

اب د کو لمبا طہ کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

و ع = ج = فو ما ن۔ اجم طہ اجم (ماجم طہ) و ما

۔ ج = فو ما ن۔ اجم طہ اجم (ماجم طہ) و ما (۲)

بشرطیکہ تکملے یکساں طور پر مستحق ہوں اور یہ ہیں کیونکہ اگر ج مثبت ہو
خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو تو ا کے جم طہ کے ج اور ان میں سے
ہر ایک تکملہ تعداد اکم ہے ذیل کے تکملہ سے

$$\frac{1}{\text{ج}} \text{ما}^{\infty} \text{فرما} = \frac{\text{جا}^{\infty} (\text{ن} + 1)}{\text{ج}^{\infty}}$$

پس ہر ایک تکملہ یکساں طور پر مستحق ہے جبکہ $\frac{1}{\text{ج}} > \frac{1}{\text{ط}}$ ۔
ہم مساوات (۲) کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ج}} \text{ما}^{\infty} \text{فرما} \{ \text{قو}^{\infty} \text{ما}^{\infty} \text{ج}^{\infty} \text{جب} (\text{ما}^{\infty} \text{ج}^{\infty} \text{ط}) \} \text{فرما}$$

اور تکملہ بالخصوص سے

$$\frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ج}} \text{ن} \text{ما}^{\infty} \text{ج}^{\infty} \text{ما}^{\infty} \text{جب} (\text{ما}^{\infty} \text{ج}^{\infty} \text{ط}) \text{فرما} = \text{ن} \text{و} \dots (۳)$$

$$\text{اسی طرح سے } \frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ج}} \text{ن} \text{ع} \dots \dots \dots (۴)$$

$$(۳) \text{ اور } (۴) \text{ سے } \frac{1}{\text{ط}} = \frac{1}{\text{ج}} \text{ن} \text{ع} = \text{کر} = \text{ج}^{\infty} \text{ن} \text{ط} \text{جب} \text{ج}^{\infty} \text{ن} \text{ط}$$

$$\text{جب} \text{ط} = \text{تو} = \frac{1}{\text{ج}} \text{ما}^{\infty} \text{فرما} = \text{جا}^{\infty} (\text{ن}) \text{ } \frac{1}{\text{ط}} =$$

$$\text{پس } 1 = \text{جا}^{\infty} (\text{ن}) \text{ } \frac{1}{\text{ج}} =$$

$$\text{اور اس لئے } 1 = \text{جا}^{\infty} (\text{ن}) \text{ } \frac{1}{\text{ج}} \text{ن} \text{ط} = \text{و} = \frac{1}{\text{ج}} \text{ } \frac{1}{\text{ط}} = \text{جا}^{\infty} (\text{ن}) \text{ } \frac{1}{\text{ج}} \text{ن} \text{ط}$$

$$\dots \dots \dots (۵)$$

اس لئے ہمیں ذیل کے نتائج حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{\text{ج}} \text{و}^{\infty} \text{لا}^{\infty} \text{ج}^{\infty} \text{ب} \text{لا}^{\infty} \text{فرما} = \frac{\text{جا}^{\infty} (\text{ن}) \text{ } \frac{1}{\text{ج}} \text{ن} \text{ط}}{\text{ج}^{\infty}} \dots \dots \dots (۶)$$

$$\text{آ}^\infty \text{فولا}^\infty \text{لا}^\infty \text{لا}^\infty \text{جب لا}^\infty \text{لا}^\infty = \frac{\text{جا}^\infty \text{ن}^\infty \text{ط}^\infty}{\text{ر}^\infty} \dots\dots\dots (۷)$$

$$\text{جہاں } \text{ط}^\infty = \text{مس}^\infty \left(\frac{\text{پ}^\infty}{\text{ا}^\infty} \right) \text{، } \text{ر}^\infty = (\text{ا}^\infty + \text{ب}^\infty)^\infty$$

(۶) اور (۷) میں مستقلات کو خاص قیمتیں دینے سے کئی ضروری نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{جب } \text{ا}^\infty = \text{ب}^\infty < . \text{ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے اگر } > \text{ا}^\infty - \text{ن}^\infty > 1$$

$$\text{آ}^\infty \text{جم لا}^\infty \text{لا}^\infty = \frac{\text{جا}^\infty \text{ن}^\infty \text{جم}^\infty \text{ن}^\infty}{\text{ب}^\infty} \text{، } \text{آ}^\infty \text{جب لا}^\infty \text{لا}^\infty = \frac{\text{لا}^\infty \text{ن}^\infty}{\text{لا}^\infty \text{ن}^\infty}$$

$$= \frac{\text{جا}^\infty \text{ن}^\infty \text{جب}^\infty \text{ن}^\infty}{\text{ب}^\infty} \dots\dots\dots (۸)$$

دوسری مساوات درست رہتی ہے اگر $> \text{ا}^\infty - \text{ن}^\infty > 2$

ان تینوں میں رکھو ب = ا = ۱ تب چونکہ جا = ۱ = ۱۱ اسلئے

$$\text{آ}^\infty \text{جم لا}^\infty \text{لا}^\infty = \frac{\text{لا}^\infty}{\text{ا}^\infty} = \frac{\text{لا}^\infty}{1} = \text{آ}^\infty \text{جب لا}^\infty \text{لا}^\infty \dots\dots\dots (۹)$$

اور لا کی بجائے لا مندرجہ کرنے سے

$$\text{آ}^\infty \text{جم لا}^\infty \text{لا}^\infty = \frac{1}{\text{ا}^\infty} = \frac{1}{1} = \text{آ}^\infty \text{جب لا}^\infty \text{لا}^\infty \dots\dots\dots (۱۰)$$

نیز (۶) اور (۷) میں رکھو ن = ۱ اور لا کی بجائے لا رکھو تب

$$\text{آ}^\infty \text{فولا}^\infty \text{لا}^\infty \text{جم لا}^\infty \text{لا}^\infty = \frac{\text{لا}^\infty \text{جم}^\infty \text{ن}^\infty}{\text{ا}^\infty} \text{، } \text{آ}^\infty \text{فولا}^\infty \text{لا}^\infty \text{جب لا}^\infty \text{لا}^\infty = \frac{\text{لا}^\infty}{\text{ا}^\infty}$$

$$= \frac{\text{لا}^\infty \text{جب}^\infty \text{ط}^\infty}{\text{ا}^\infty} \dots\dots\dots (۱۱)$$

جہاں ط اور رکی قیمتیں دہی ہیں جو پہلے تھیں۔

۷۳۔ لا انتہا حدود کے لئے مکمل کی ترتیب مسئلہ دفعہ ۷۲

سے ظاہر ہے کہ بعض حالات کے ماتحت مکمل کی ترتیب اس صورت میں بھی بدل سکتی ہے جبکہ ایک حد لامتناہی ہو۔ دفعہ ۱۷ کے مسئلہ ۳ سے ان شرائط کی تعیین ہوتی ہے جن کے ماتحت دفعہ ۷۲ کے مسئلہ کو توسیع دیکر ہم اس صورت پر بھی حاوی کر سکتے ہیں جس میں اوپر کی حد مابھی لامتناہی ہو۔ مسئلہ ۱۔ اگر مکمل

ف (لا، ما) مر (لا، (۱) ف (لا، ما) مر (لا، (۲)

بالترتیب یکساں طور پر مستحق ہوں بالتمام اختیار دہی وقفوں (و ک ب) اور (و ک ب) میں

اور اگر تکملہ ف (لا، ما) مر (لا، (۳) یکساں طور پر مستحق ہو پورے نامحدود وقفہ ما کے لئے تو

ف (لا، ما) مر (لا، (۴) فرض کرو کہ دفعہ ۱۷ مسئلہ ۳ کے تفاعل ف (لا، ما) کی تعیین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے

$$ف (لا، ما) = ف (لا، ما) مر (لا، (۵)$$

اس صورت میں اوپر کا تکملہ (۳) مسئلہ مذکورہ کا تفاعل سا (ما) ہوگا۔ اوپر کے تکملہ (۲) کا استدقاق مسئلہ مذکورہ کی شرط (۲) کو پورا کرتا ہے اور تکملہ (۳) کا استدقاق شرط (۱) کو اور اوپر کے تکملہ (۱) کے استدقاق کی وجہ سے ہم دفعہ ۷۲ کے مسئلہ کو لگا سکتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$ف (لا، ما) مر (لا، (۵) = ف (لا، ما) مر (لا، (۶)$$

نہی کرنا (لا، ما) فرما (سئلہ دفعہ ۷۲)

= جَرَّ لا جَرَّ فَا (لا، ما) مرما (مسئله ۳، دفعه ۱۷)

طالب علم شاید یہ خیال کرے گا کہ موزن اذکر تکملہ اس سے پہلے تکملہ کو لکھنے کا صرف ایک اور طریقہ ہے لیکن یہ ایسا نہیں ہے۔ اخیر سے دوسرے تکملہ میں اعمال کی ترتیب یہ ہے (۱) تکملہ لمجاظ ما کے (۲) تکملہ لمجاظ لا کے اور انتہا لا کے ∞ کی طرف گذر (۳) انتہا ما کے ∞ کی طرف گذر۔ آخری تکملہ میں ترتیب یہ ہے (۱) تکملہ لمجاظ ما کے (۲) انتہا ما کے ∞ کی طرف گذر (۳) تکملہ لمجاظ لا کے اور انتہا لا کے ∞ کی طرف گذر۔ ترتیب اٹھانے کے لئے اس کا جو از ثبات کرنے کی ضرورت ہوگی جیسے ذیل کی سادہ مثال سے ظاہر ہے۔ اگر ۱۔ ۷۔ ۸۔ ۹۔ ۱۰۔ ۱۱۔ ۱۲۔ ۱۳۔ ۱۴۔ ۱۵۔ ۱۶۔ ۱۷۔ ۱۸۔ ۱۹۔ ۲۰۔ ۲۱۔ ۲۲۔ ۲۳۔ ۲۴۔ ۲۵۔ ۲۶۔ ۲۷۔ ۲۸۔ ۲۹۔ ۳۰۔ ۳۱۔ ۳۲۔ ۳۳۔ ۳۴۔ ۳۵۔ ۳۶۔ ۳۷۔ ۳۸۔ ۳۹۔ ۴۰۔ ۴۱۔ ۴۲۔ ۴۳۔ ۴۴۔ ۴۵۔ ۴۶۔ ۴۷۔ ۴۸۔ ۴۹۔ ۵۰۔ ۵۱۔ ۵۲۔ ۵۳۔ ۵۴۔ ۵۵۔ ۵۶۔ ۵۷۔ ۵۸۔ ۵۹۔ ۶۰۔ ۶۱۔ ۶۲۔ ۶۳۔ ۶۴۔ ۶۵۔ ۶۶۔ ۶۷۔ ۶۸۔ ۶۹۔ ۷۰۔ ۷۱۔ ۷۲۔ ۷۳۔ ۷۴۔ ۷۵۔ ۷۶۔ ۷۷۔ ۷۸۔ ۷۹۔ ۸۰۔ ۸۱۔ ۸۲۔ ۸۳۔ ۸۴۔ ۸۵۔ ۸۶۔ ۸۷۔ ۸۸۔ ۸۹۔ ۹۰۔ ۹۱۔ ۹۲۔ ۹۳۔ ۹۴۔ ۹۵۔ ۹۶۔ ۹۷۔ ۹۸۔ ۹۹۔ ۱۰۰۔ ۱۰۱۔ ۱۰۲۔ ۱۰۳۔ ۱۰۴۔ ۱۰۵۔ ۱۰۶۔ ۱۰۷۔ ۱۰۸۔ ۱۰۹۔ ۱۱۰۔ ۱۱۱۔ ۱۱۲۔ ۱۱۳۔ ۱۱۴۔ ۱۱۵۔ ۱۱۶۔ ۱۱۷۔ ۱۱۸۔ ۱۱۹۔ ۱۲۰۔ ۱۲۱۔ ۱۲۲۔ ۱۲۳۔ ۱۲۴۔ ۱۲۵۔ ۱۲۶۔ ۱۲۷۔ ۱۲۸۔ ۱۲۹۔ ۱۳۰۔ ۱۳۱۔ ۱۳۲۔ ۱۳۳۔ ۱۳۴۔ ۱۳۵۔ ۱۳۶۔ ۱۳۷۔ ۱۳۸۔ ۱۳۹۔ ۱۴۰۔ ۱۴۱۔ ۱۴۲۔ ۱۴۳۔ ۱۴۴۔ ۱۴۵۔ ۱۴۶۔ ۱۴۷۔ ۱۴۸۔ ۱۴۹۔ ۱۵۰۔ ۱۵۱۔ ۱۵۲۔ ۱۵۳۔ ۱۵۴۔ ۱۵۵۔ ۱۵۶۔ ۱۵۷۔ ۱۵۸۔ ۱۵۹۔ ۱۶۰۔ ۱۶۱۔ ۱۶۲۔ ۱۶۳۔ ۱۶۴۔ ۱۶۵۔ ۱۶۶۔ ۱۶۷۔ ۱۶۸۔ ۱۶۹۔ ۱۷۰۔ ۱۷۱۔ ۱۷۲۔ ۱۷۳۔ ۱۷۴۔ ۱۷۵۔ ۱۷۶۔ ۱۷۷۔ ۱۷۸۔ ۱۷۹۔ ۱۸۰۔ ۱۸۱۔ ۱۸۲۔ ۱۸۳۔ ۱۸۴۔ ۱۸۵۔ ۱۸۶۔ ۱۸۷۔ ۱۸۸۔ ۱۸۹۔ ۱۹۰۔ ۱۹۱۔ ۱۹۲۔ ۱۹۳۔ ۱۹۴۔ ۱۹۵۔ ۱۹۶۔ ۱۹۷۔ ۱۹۸۔ ۱۹۹۔ ۲۰۰۔ ۲۰۱۔ ۲۰۲۔ ۲۰۳۔ ۲۰۴۔ ۲۰۵۔ ۲۰۶۔ ۲۰۷۔ ۲۰۸۔ ۲۰۹۔ ۲۱۰۔ ۲۱۱۔ ۲۱۲۔ ۲۱۳۔ ۲۱۴۔ ۲۱۵۔ ۲۱۶۔ ۲۱۷۔ ۲۱۸۔ ۲۱۹۔ ۲۲۰۔ ۲۲۱۔ ۲۲۲۔ ۲۲۳۔ ۲۲۴۔ ۲۲۵۔ ۲۲۶۔ ۲۲۷۔ ۲۲۸۔ ۲۲۹۔ ۲۳۰۔ ۲۳۱۔ ۲۳۲۔ ۲۳۳۔ ۲۳۴۔ ۲۳۵۔ ۲۳۶۔ ۲۳۷۔ ۲۳۸۔ ۲۳۹۔ ۲۴۰۔ ۲۴۱۔ ۲۴۲۔ ۲۴۳۔ ۲۴۴۔ ۲۴۵۔ ۲۴۶۔ ۲۴۷۔ ۲۴۸۔ ۲۴۹۔ ۲۵۰۔ ۲۵۱۔ ۲۵۲۔ ۲۵۳۔ ۲۵۴۔ ۲۵۵۔ ۲۵۶۔ ۲۵۷۔ ۲۵۸۔ ۲۵۹۔ ۲۶۰۔ ۲۶۱۔ ۲۶۲۔ ۲۶۳۔ ۲۶۴۔ ۲۶۵۔ ۲۶۶۔ ۲۶۷۔ ۲۶۸۔ ۲۶۹۔ ۲۷۰۔ ۲۷۱۔ ۲۷۲۔ ۲۷۳۔ ۲۷۴۔ ۲۷۵۔ ۲۷۶۔ ۲۷۷۔ ۲۷۸۔ ۲۷۹۔ ۲۸۰۔ ۲۸۱۔ ۲۸۲۔ ۲۸۳۔ ۲۸۴۔ ۲۸۵۔ ۲۸۶۔ ۲۸۷۔ ۲۸۸۔ ۲۸۹۔ ۲۹۰۔ ۲۹۱۔ ۲۹۲۔ ۲۹۳۔ ۲۹۴۔ ۲۹۵۔ ۲۹۶۔ ۲۹۷۔ ۲۹۸۔ ۲۹۹۔ ۳۰۰۔ ۳۰۱۔ ۳۰۲۔ ۳۰۳۔ ۳۰۴۔ ۳۰۵۔ ۳۰۶۔ ۳۰۷۔ ۳۰۸۔ ۳۰۹۔ ۳۱۰۔ ۳۱۱۔ ۳۱۲۔ ۳۱۳۔ ۳۱۴۔ ۳۱۵۔ ۳۱۶۔ ۳۱۷۔ ۳۱۸۔ ۳۱۹۔ ۳۲۰۔ ۳۲۱۔ ۳۲۲۔ ۳۲۳۔ ۳۲۴۔ ۳۲۵۔ ۳۲۶۔ ۳۲۷۔ ۳۲۸۔ ۳۲۹۔ ۳۳۰۔ ۳۳۱۔ ۳۳۲۔ ۳۳۳۔ ۳۳۴۔ ۳۳۵۔ ۳۳۶۔ ۳۳۷۔ ۳۳۸۔ ۳۳۹۔ ۳۴۰۔ ۳۴۱۔ ۳۴۲۔ ۳۴۳۔ ۳۴۴۔ ۳۴۵۔ ۳۴۶۔ ۳۴۷۔ ۳۴۸۔ ۳۴۹۔ ۳۵۰۔ ۳۵۱۔ ۳۵۲۔ ۳۵۳۔ ۳۵۴۔ ۳۵۵۔ ۳۵۶۔ ۳۵۷۔ ۳۵۸۔ ۳۵۹۔ ۳۶۰۔ ۳۶۱۔ ۳۶۲۔ ۳۶۳۔ ۳۶۴۔ ۳۶۵۔ ۳۶۶۔ ۳۶۷۔ ۳۶۸۔ ۳۶۹۔ ۳۷۰۔ ۳۷۱۔ ۳۷۲۔ ۳۷۳۔ ۳۷۴۔ ۳۷۵۔ ۳۷۶۔ ۳۷۷۔ ۳۷۸۔ ۳۷۹۔ ۳۸۰۔ ۳۸۱۔ ۳۸۲۔ ۳۸۳۔ ۳۸۴۔ ۳۸۵۔ ۳۸۶۔ ۳۸۷۔ ۳۸۸۔ ۳۸۹۔ ۳۹۰۔ ۳۹۱۔ ۳۹۲۔ ۳۹۳۔ ۳۹۴۔ ۳۹۵۔ ۳۹۶۔ ۳۹۷۔ ۳۹۸۔ ۳۹۹۔ ۴۰۰۔ ۴۰۱۔ ۴۰۲۔ ۴۰۳۔ ۴۰۴۔ ۴۰۵۔ ۴۰۶۔ ۴۰۷۔ ۴۰۸۔ ۴۰۹۔ ۴۱۰۔ ۴۱۱۔ ۴۱۲۔ ۴۱۳۔ ۴۱۴۔ ۴۱۵۔ ۴۱۶۔ ۴۱۷۔ ۴۱۸۔ ۴۱۹۔ ۴۲۰۔ ۴۲۱۔ ۴۲۲۔ ۴۲۳۔ ۴۲۴۔ ۴۲۵۔ ۴۲۶۔ ۴۲۷۔ ۴۲۸۔ ۴۲۹۔ ۴۳۰۔ ۴۳۱۔ ۴۳۲۔ ۴۳۳۔ ۴۳۴۔ ۴۳۵۔ ۴۳۶۔ ۴۳۷۔ ۴۳۸۔ ۴۳۹۔ ۴۴۰۔ ۴۴۱۔ ۴۴۲۔ ۴۴۳۔ ۴۴۴۔ ۴۴۵۔ ۴۴۶۔ ۴۴۷۔ ۴۴۸۔ ۴۴۹۔ ۴۵۰۔ ۴۵۱۔ ۴۵۲۔ ۴۵۳۔ ۴۵۴۔ ۴۵۵۔ ۴۵۶۔ ۴۵۷۔ ۴۵۸۔ ۴۵۹۔ ۴۶۰۔ ۴۶۱۔ ۴۶۲۔ ۴۶۳۔ ۴۶۴۔ ۴۶۵۔ ۴۶۶۔ ۴۶۷۔ ۴۶۸۔ ۴۶۹۔ ۴۷۰۔ ۴۷۱۔ ۴۷۲۔ ۴۷۳۔ ۴۷۴۔ ۴۷۵۔ ۴۷۶۔ ۴۷۷۔ ۴۷۸۔ ۴۷۹۔ ۴۸۰۔ ۴۸۱۔ ۴۸۲۔ ۴۸۳۔ ۴۸۴۔ ۴۸۵۔ ۴۸۶۔ ۴۸۷۔ ۴۸۸۔ ۴۸۹۔ ۴۹۰۔ ۴۹۱۔ ۴۹۲۔ ۴۹۳۔ ۴۹۴۔ ۴۹۵۔ ۴۹۶۔ ۴۹۷۔ ۴۹۸۔ ۴۹۹۔ ۵۰۰۔ ۵۰۱۔ ۵۰۲۔ ۵۰۳۔ ۵۰۴۔ ۵۰۵۔ ۵۰۶۔ ۵۰۷۔ ۵۰۸۔ ۵۰۹۔ ۵۱۰۔ ۵۱۱۔ ۵۱۲۔ ۵۱۳۔ ۵۱۴۔ ۵

نہیٰ \int_0^∞ فرلا \int_0^∞ جم (لاما) فرما = نہیٰ \int_0^∞ جب (لاما) فرلا

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \pi \delta(t) = 0.$$

لیکن کڑ مرلا کڑ جم (لا ما) مرما ایک معین مقدار نہیں ہے۔
ہم صورت حال کو اسطور پر بھی بیان کر سکتے ہیں

[illegible]

- نیا کفر کفر فافا (۱) و ما (۵)

ہمیں ثابت کرنا چاہیے کہ آخری حکم صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جسے فاصلہ لانا ہی کی طرف مائل ہوتا ہے، اوپر کے مسئلہ کے لئے ثبوت و فقہاء

مسئلہ ۳ کے اندر شامل ہو گیا۔

یکساں استدقاق بالعموم ایسا ممکن ہے کہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستدق ہو بالتمام وقفوں (و، ج، عا) (ج + عا، ب) میں جہاں $و \geq ج \geq ب$ اور عا، کا اختیاری چھوٹی نسبت مقداریں ہیں یعنی استدقاق ج کے پاس یکساں نہیں رہتا۔ اگر ج جیسی قیمتیں تعداد میں محدود ہوں تو اسے ہم یوں بیان کر سکتے کہ تکملہ تمام وقفہ (و، ب) میں عام طور پر یکساں استدقاق رکھتا ہے۔ اگر ج = و تو ہم لے سکتے ہیں عا = . اور اگر ج = ب تو عا = . لیا جاسکتا ہے۔ مسئلہ ۲۔ اگر تکملہ (۱) محض عام طور پر یکساں استدقاق رکھتا ہو لیکن تکملہ (۳) مسلسل تغاقل ہو ماکا معث و \geq ما \geq ب کے لئے تو

فاما (لا، ما) = كى ولا كى فاما (لا، ما) فرما.... (۶)

جہاں اوپر کی حد ماکوئی عدد ہے دفعہ (ا) ب کے درمیان -
مسئلہ ۱ دفعہ ۲ کی یہ توسیع ہے، فرض کرو کہ صرف ایک نقطہ ج ایسا
اور $a > j > a$ ، اگر ایک سے زیادہ ایسے نقطے ہوں تو اسی استدلال
کو کمر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ مکملہ (ا) کو ف (ما) سے تعبیر کرو تب
(مقابلہ کرو دفعہ ۲۵ کے ساتھ)

کُف (ما) فرما = عید۔ کُف (ما) فرما + عید۔ ف (ما) فرما (تعریف کے لئے)

$$= \text{نیب} \cdot \text{آرمو} \int \text{فلو} \text{، ما} + \text{مرآ} \cdot \text{نیب} \cdot \text{آرمو} \int \text{فلو} \text{، ما}$$

[مسئلہ دفعہ ۲ کی رو سے]

= $\text{کر} \text{لا} \text{کر} \text{فا} \text{لا} \text{ما} \text{فرما} + \text{کر} \text{لا} \text{کر} \text{فا} \text{لا} \text{ما} \text{فرما}$

کیونکہ تکملہ (۳) مسلسل ہے اور ہم $\text{ع} = \text{ا}$ بنا سکتے ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے کیونکہ ان تکملوں کا مجموعہ (۶) کے بائیں جانب کے تکملہ کے مساوی ہے۔
یہ یاد رہے کہ (۳) مسلسل ہوگا اگر یہ وقفہ (ا'ب) میں یکساں طور پر مستند ہو۔

مسئلہ ۳۔ مساوات (۴) اس صورت میں بھی درست رہتی ہے جبکہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستند ہو بالعموم بشرطیکہ مسئلہ (۱) کے اور شرائط پورے ہوں یہ مسئلہ ٹیبلڈ بالا کا سیدھا نتیجہ صریح ہے۔
مسئلہ ۴۔ اگر تکملہ (۱) اور (۲) یکساں طور پر مستند ہوں محض عام طور پر سراسر وقفوں (ا'ب) (ا'ب) میں بالترتیب، لیکن اگر تکملہ (۳) اور تناظر تکملہ

$\text{کر} \text{فرما} \text{کر} \text{فا} \text{لا} \text{ما} \text{فرلا} \dots \dots \dots (۳)$

یکساں طور پر مستند ہوں سراسر نامحدود وقفوں $\text{ما} \leq \text{ا}$ اور $\text{لا} \leq \text{ا}$ میں بالترتیب تو مساوات (۴) درست رہتی ہے بشرطیکہ (۴) میں کا ایک تکملہ قابل تعین ہو۔

فرض کر دو کہ (۴) کے بائیں جانب تکملہ $\text{کر} \text{فرلا} \text{کر} \text{فا} \text{لا} \text{ما} \text{فرما}$

قابل تعین ہے اور اس کو (۱) سے تعبیر کر دو۔ تب (مقابلہ کر دو دفعہ ۶۴ کے ساتھ)

نہا $\text{کر} \text{فرلا} \text{کر} \text{فا} \text{لا} \text{ما} \text{فرما} = \dots \dots \dots (۴)$

چونکہ تکملہ (۳) مسلسل ہے اسلئے مسئلہ (۲) کی رو سے

محدود حدود والے تکملہ کی صورت میں بھی توسیع دی جا سکتی ہے جس میں
تکملہ ایک حد پر لائننا ہی ہو جائے۔

تعریف۔ اگر ف (لا، ما) مسلسل ہو سرسردقوں

$$1 > لا \geq ب، او \geq ما \geq ب$$

میں لیکن لائننا ہی ہو جائے لا = 1، ما = ما کے لئے تو تکملہ

$$ف (ما) = ف (لا، ما) فر لا (۱)$$

یکساں طور پر مستحق کہلاتا ہے سرسردقفہ او $\geq ما \geq ب$ میں اگر ایک
عدد لا ایسا موجود ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور جبکہ $1 > لا > 1 + لا$ تو

$$1 \text{ ف (لا، ما) فر لا } > ص (۲)$$

اگر ف (لا، ما) لائننا ہی ہو جبکہ لا = ب، ما = ما تو (۲) کے جواب میں

تکملہ کے حدود لا اور ب ہونگے ایسے کہ ب۔ لا $> لا > ب$

طالب علم آسانی ثابت کر سکیگا کہ مسئلہ ۱ دفعہ ۱۷ اور مسائل ۲۱، ۲۲ دفعہ ۲۷

(مناسب ترکیبوں کے ساتھ) غیر واجب تکملہ (۱) کی صورت میں بھی جائز ہیں

ہم ذیل کی چند مثالوں کے ساتھ ختم کرتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱۔ ثابت کرو کہ } 1 = ف (او، فر) = \frac{31}{2}$$

متغیر کو لا میں ابدال ع = لا ما کے ذریعہ تبدیل کرو، تب

$$1 = ف (او، فر) = ف (لا، ما) فر لا$$

او سے ضرب دو اور ما سے ما = ما تک تکملہ کرو، اس طرح

$$1 = 1 \text{ ف (او، فر) } = ف (ما، فر) = ف (لا، ما) فر لا$$

تکمل کی ترتیب بدلنے سے

$$1 = 1 \text{ تو } (1+1) \text{ ما } = 2 \text{ ما } = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

یہ دیکھنے کے لئے کہ ہم تکمل کی ترتیب بدل سکتے ہیں، فرض کرو کہ

$$\text{ما تو } (1+1) \text{ ما } = \text{فا } (1+1) \text{ ما}$$

$$\text{اب } 1 \text{ فا } (1+1) \text{ ما } = 2 \text{ ما } = 2 \text{ ما } = 2 \text{ ما}$$

اگر ما ۱۔ تو [چونکہ 1 تو 1 مری مستحق ہے] ہم صریحاً دریافت کر سکتے ہیں جو ما پر منحصر نہ ہو اور جبکہ 1۔ م تو

$$1 \text{ فا } (1+1) \text{ ما } = 2 \text{ ما}$$

اسلئے 1 فا (1+1) ما یکساں طور پر مستحق ہے سمت ما کے 1۔

کے لئے۔ یہ یکساں طور پر مستحق ہے بالعموم سمت ما کے لئے اور زیادہ قوی وجوہات کی بناء پر اختیاری وقفہ (ب) کے لئے۔ دفعہ ۳، مسئلہ ۳ کے اطلاق کے متعلق اور شرائط صریحاً پورے ہوتے ہیں، تکمل کی ترتیب کا بدلنا اس لئے جائز ہے۔

مثال ۲۔ اگر 1۔ ج۔ 1۔ ن۔ 1۔ تو ثابت کرو کہ

مثال ۴۔ اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} > \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ تو $\frac{1}{2}$ معلوم کرو۔

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{لوک (جب لا) فلا} \dots \dots \dots (1)$$

بشرطیکہ مکملہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔
اب رکھو ما = جب لا، تو حاصل ہوگا

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{لوک (جب لا) فلا}$$

$$> \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{لوک (جب لا) فلا}$$

$$> \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{لوک (جب لا) فلا}$$

چونکہ جب لا لوک (جب لا) لا کے ساتھ صفی کی طرف مستحق ہوتا ہے اس لئے صریحاً دفعہ ۴، کی تعریف کے شرائط پورے ہوئے ہیں اس لئے (۱) کا مکملہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے اور مساوات (۱) سے $\frac{1}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ جا (ن) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ لا لا کے مشتق معلوم کرو۔

اگر $\frac{1}{2} > \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ تو دفعہ ۲، مسئلہ ۱ لگ سکتا ہے کیونکہ لا لا لوک لا (۱) صفی کی طرف استحقاق کرتا ہے لا کے ساتھ اگر ن۔ ۱ اور م مثبت ہوں (مثال ۱۰، مشتق، حصہ اول) اس اہتہ کو ہم تفاعل کی قیمت مانتے ہیں جبکہ لا = اگر ن ≥ 1 تو لکھو

$$\text{جا (ن)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{لا لا لا}$$

$$۲۰۔ \quad \text{کے قو}^{\infty} \text{ لا جب } ۲ \text{ ب لا } \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} \quad \text{کے قو}^{\frac{۱}{۲}} \text{ لا}$$

$$۲۱۔ \quad \text{یکملہ کے قو}^{\infty} \text{ لا}^{\frac{۱}{۲}} \text{ فر لا}^{\frac{۱}{۲}} \text{ (ا + ب + ج لا) کے قو}^{\frac{۱}{۲}} \text{ لا}^{\frac{۱}{۲}} \text{ کو ابدال ما = ج لا + } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \text{ کے ذریعہ}$$

تحویل کرو، 'ا' ب، 'ج' سب مثبت ہیں اور ثابت کرو کہ تکملہ کی قیمت یہ ہے

$$\text{ا ج ا ن} - \left(\frac{۱}{۲} \right) \div \text{ج} \{ \text{ب} + ۲ \text{ ا ج} \} - \text{ج ا ن} \quad \text{ج ا ن}$$

$$۲۲۔ \quad \text{اگر ع کی ہر مثبت قیمت کے لئے فہ (ع) اور اس کا مشتق فہ (ع) مسلسل ہوں اور اگر فہ (ع) محدود اعداد ص اور ن کی جانب مستقیم ہو جبکہ ع بالترتیب لاتنا ہی اور صفر کی طرف مائل ہو تو ثابت کرو کہ}$$

$$(۱) \quad \text{کے قو}^{\infty} \text{ لا کے قو}^{\infty} \text{ لا (ما) فر ما = کے قو}^{\infty} \text{ لا (ما) فر لا}$$

$$(۲) \quad \text{کے قو}^{\infty} \text{ لا (ب لا) - فہ (لا) فر لا = (ص - ن) لوک } \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$$

واضح ہو کہ فہ (لا ما) حاصل ضرب لا ما کا تفاعل ہے۔ مسئلہ (۲) فرو لینے کا مسئلہ کہلاتا ہے۔

$$۲۳۔ \quad \text{ب} < \text{ا} < \text{و} \quad \text{ثابت کرو کہ}$$

$$(۱) \quad \text{کے قو}^{\infty} \text{ لا (ب لا) - سن (لا) سن (لا) فر لا = } \frac{\text{لوک } \frac{\text{ب}}{\text{لا}}}{\text{لا}}$$

$$(۲) \quad \text{کے قو}^{\infty} \text{ لا (ب لا) - سن (لا) سن (لا) فر لا = } \frac{\text{لوک } \frac{\text{ب}}{\text{لا}}}{\text{لا}}$$

۲۴۔ ذیل کے نتائج قائم کرو

$$(۱) \quad \text{کے قو}^{\infty} \text{ لا}^{\frac{۱}{۲}} \text{ - قو}^{\frac{۱}{۲}} \text{ لا}^{\frac{۱}{۲}} \text{ - قو}^{\frac{۱}{۲}} \text{ لا}^{\frac{۱}{۲}} \text{ فر لا}^{\frac{۱}{۲}} = ۱ - \text{لوک } \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$$

$$(۲) \int \left\{ (ن - \frac{1}{ن}) + (ن + \frac{1}{ن}) \right\} (ن - \frac{1}{ن}) \frac{1}{ن} dن$$

$$= (ن - \frac{1}{ن}) (ن + \frac{1}{ن}) (ن - \frac{1}{ن}) \frac{1}{ن} dن$$

۲۵ - مثال ۲۵ مشق ۱۳ کے دوسرے تکملہ کو تفریق کرنے سے مثال ۲۴ مشق ۱۳ کی مساوات قائم کرو۔

۲۶ - اگر جے (لا) = $\frac{1}{ن}$ \int جم (لا جم ط) فرطہ تو ثابت کرو کہ (ب) <

$$\int \frac{1}{ن} dن = \frac{1}{ن} + \frac{1}{ن}$$

جہاں جے (لا) سے مراد ہے (x) \int جے (لا) > ۰ > م > ۱ تو ثابت کرو کہ

$$\int \frac{1}{ن} dن = \frac{1}{ن} + \frac{1}{ن} \quad \text{جہاں جے (لا) > ۰ > م > ۱ تو ثابت کرو کہ}$$

$$۲۸ - اگر و = \frac{1}{ن} \int \frac{1}{ن} dن = \frac{1}{ن} + \frac{1}{ن} \quad \text{جہاں جے (لا) > ۰ > م > ۱ تو ثابت کرو کہ}$$

$$(۱) \frac{جف و}{جفت} = \frac{جف و}{جفت} \quad (۲) و = و جبکہ ت = لا < .$$

۲۹ - اگر و = $\frac{1}{ن}$ \int ف (ع) تو عہا جہاں و = لا + ۲ عہا اگت تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{جف و}{جفت} = \frac{جف و}{جفت} \quad (۲) و = ف (لا) جبکہ ت = .$$

اپہ دیکھا جائے کہ

$$ع = \frac{\pi}{2} \text{ جو } \pi \text{ جم (دہلا) } = \frac{\pi}{2} \text{ جو } \pi \text{ جب (دہلا)}$$

۳۳۔ ثابت کرو کہ $\pi \text{ لا جب } 2 \text{ لا فلا} = \frac{\pi}{1 + \frac{\pi}{2}}$ لا جب $2 \text{ لا فلا} \pi \text{ جو جب مافرمایا}$
اور پھر مکمل کی ترتیب بدینے اور مثال ۳۲ کو استعمال کرنے سے ثابت کرو کہ
تکملہ کی قیمت $\frac{1}{\pi} \text{ جو } \pi \text{ جب (دہلا)}$ ہے۔

ذیل کے نتائج حاصل کرو

$$(۱) \quad \pi \text{ لا جب } 2 \text{ لا فلا} = \frac{\pi}{1 + \frac{\pi}{2}} \text{ جو } \pi \text{ جب (دہلا) } + \frac{\pi}{2}$$

$$(۲) \quad \pi \text{ لا جب } 2 \text{ لا فلا} = \frac{\pi}{1 + \frac{\pi}{2}} \text{ جو } \pi \text{ جم (دہلا) } + \frac{\pi}{2}$$

$$(۳) \quad \pi \text{ لا جب } 2 \text{ لا فلا} = \frac{\pi}{1 + \frac{\pi}{2}} \text{ جو } \pi \text{ جم (دہلا)}$$

۳۴۔ دفعہ ۲، مثال ۱۰ سے ذیل کے نتائج حاصل کرو

$$(۱) \quad \pi \text{ جم (دہلا) } + 2 \text{ ب لا فلا} = \left\{ \frac{\pi}{2} \text{ جم (دہلا) } + \text{جب (دہلا)} \right\}$$

$$(۲) \quad \pi \text{ جب (دہلا) } + 2 \text{ ب لا فلا} = \left\{ \frac{\pi}{2} \text{ جم (دہلا) } - \text{جب (دہلا)} \right\}$$

$$(۳) \quad \pi \text{ جم (دہلا) } + 2 \text{ ب لا فلا} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} \text{ جم (دہلا) } + \text{جب (دہلا)} \right\}$$

$$(۴) \quad \pi \text{ جب (دہلا) } + 2 \text{ ب لا فلا} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} \text{ جم (دہلا) } - \text{جب (دہلا)} \right\}$$

۳۵۔ اگر $ل < ل + م + ن < ل + م + ن + ۱$ ، تو ثابت کرو کہ

باب دہم

فوریہ کے سلسلے

۵۔۔۔ فوریہ کے سلسلے۔ فرض کرو کہ $\pi \geq \pi \geq \pi$ کے لئے متغیر π (لا) ذیل کے لائنہاں سلسلہ سے تعبیر ہو سکتا ہے

ف (لا) = $\{ \pi \} \cup \{ \pi \} \cup \{ \pi \} \cup \dots$ (۱)
 نیز یہی مان لو کہ ف (لا) کا سلسلہ اس سلسلہ کو رقم برقم تکمیل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ اسی صورت میں مسروں $\{ \pi \} \cup \{ \pi \} \cup \{ \pi \} \cup \dots$ کے بیان کرنا ممکن ہے۔

سب سے پہلے یہ قابل توجہ ہے کہ ذیل کے دونوں سیکھے (م) ثابت صحیح ہیں

$\{ \pi \} \cup \{ \pi \} \cup \{ \pi \} \cup \dots$ جب π لاجب π لا فلا

صفر ہوتے ہیں اگر π غیر مساوی ہوں، لیکن ان میں سے ہر ایک π کے مساوی ہے

اگر π ۔۔۔ نیز سیکھ $\{ \pi \} \cup \{ \pi \} \cup \{ \pi \} \cup \dots$ لاجب π لا فلا ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔ یہ نتائج جیوب اور

جیوب اتمام کے حاصل ضربوں کو بطور حاصل جمع اور حاصل تفریق کے بیان کرنے کے آسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

اب مساوات (۱) کے ہر رکن کو۔ π سے π تک تکمیل کرو، سلسلہ کا ہر سیکھ سوا اسے پہلے کے صفر ہوتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

ف (لا) فلا = π^2 یعنی $\frac{1}{\pi^2}$ ف (لا) فلا (۲)

اب ن کی کوئی قیمت منتخب کرو (۱) کے ہر رکن کو جم ن لا سے ضرب دو (جبکہ ن کی منتخب قیمت ہو) اور π سے π تک تکمیل کرو، سلسلہ کا ہر تکملہ صفر ہوتا ہے سوائے اس رقم کے تکملہ کے جس کے اندر جم ن لا شامل ہوتا ہے۔ اس طرح ہمیں ملتا ہے

ف (لا) جم ن لا فلا = $\frac{1}{\pi}$ ف (لا) جم ن لا فلا
(۳) {

اور آخر الامر اسی طرح جب ن لا کے ساتھ ضرب دینے سے

جب = $\frac{1}{\pi}$ ف (لا) جم ن لا فلا (۴)

اگر (۳) اور (۴) میں ہم فرض کریں کہ ن کو ترتیب وار قیمتیں ۱، ۲، ۳، دی گئی ہیں تو ہمیں سب سر ۱، ۱، ۱، جب، جب، جب، حاصل ہو جائینگے اور سلسلہ (۱) پورے طور پر تعین ہو جائیگا۔

سلسلہ (۱) کو فوریہ سلسلے یا فوریہ کا سلسلہ کہتے ہیں اور یہ شاہدہ طلب ہے کہ سلسلہ لا کا دوری تفاعل ہے جس کا دور π^2 ہے۔ اسلے اگر ف (لا) دوری تفاعل نہ ہو جس کا دور π^2 ہو تو یہ ناممکن ہوگا کہ سلسلہ (۱) ف (لا) کو سمیت (-، π) سے باہر تعبیر کر سکے، دراصل موجودہ بحث میں سمیت (-، π) کے باہر تفاعل ف (لا) کی نوعیت سے ہمیں سبزد کار نہیں اور تفاعل کی سمیت کے متعلق اس قید کو طالب علم ہمیشہ پیش نظر رکھے۔

سر دریافت کرنے کے طریقہ کی توضیح کے لئے اس جگہ ہم ایک دو مثالیں حل کرینگے، ان سے یہ بھی معلوم ہوگا کہ ہمارا یہ مفروضہ کہ تفاعل فوریہ کے

سلسلہ سے تعبیر ہو سکتا ہے پورے دور کے لئے بھی ہمیشہ درست نہیں۔
مثال ۱۔ ف (لا) = لا
تھوڑے تکمل سے ظاہر ہے کہ

$$ل = لا \text{ فلا} = لا، لاجم ن لا \text{ فلا} = لا، اسلئے$$

$$ل = لا، ل = لا، ن کی ہر قیمت کے لئے۔$$

نیز ل لاجب ن لا فلا = لا۔ جہن $\frac{\pi}{n}$ جس سے جب = لا۔ جہن $\frac{\pi}{n}$
پس سلسلہ ہے

$$لا = لا (جب لا جب لا + جب لا جب لا + \dots)$$

یہ دیکھا جائے کہ ف (لا) = لا، ف (لا) = لا، لیکن جب لا = لا
تو سلسلہ کی قیمت صفر ہے، پس سلسلہ تقاضا کو تعبیر نہیں کرتا جبکہ لا = لا
اور جبکہ لا = لا - نیز یہ بھی قابل توجہ ہے کہ سلسلہ کا اشتقاق مشروط ہے
مثال ۲۔ ف (لا) = لا
اس صورت میں ہمیں ملتا ہے

$$ل = لا، ل = لا، جہن $\frac{\pi}{n}$ جس سے = لا$$

$$لا = لا - \frac{\pi}{n} (جب لا جب لا + جب لا جب لا + \dots)$$

دونوں صورتوں میں جبکہ لا = لا اور لا = لا سلسلہ کی قیمت ہے
[دیکھو مثال ۲۲ (۲) شق ۱۳]

$$\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} = \left(\dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) + \frac{\pi}{n}$$

قبول نہیں کر لیا جاسکتا۔ دراصل ایک مدت سے یہ دیکھ لیا گیا ہے کہ یہ نامستحکم ہے۔ اس مفروضہ کے جواز کو ثابت کرنے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ہم یہ دکھا دیں کہ جیسے n لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے سلسلہ (۱) کی پہلی $(n+1)$ رقموں کا مجموعہ s_n جبکہ اس کے سر (۲)، (۳)، (۴) کی رو سے دیا کرتے جائیں فی الحقیقت قیمت $f(n)$ کی طرف مستقیم ہوتا ہے۔ زیادہ وضاحت کی خاطر گزشتہ دفعہ کی مساواتوں (۲)، (۳)، (۴) میں مکمل کے متغیر کو فرض کر کے اور فرض کر کے s_n سے ذیل کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

$$s_n = 1 + \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$$

یہ مجموعہ اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$s_n = \frac{1}{n} \int_1^n \left\{ 1 + \frac{1}{x} \right\} dx \quad (n \geq 1)$$

یا خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلہ کو جمع کرنے سے

$$s_n = \frac{1}{n} \int_1^n f(x) dx \quad \text{جب } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{و } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

فرض کر کے $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ، ہمیں حاصل ہوگا

$$s_n = \frac{1}{n} \int_1^n f(x) dx \quad \text{جب } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{و } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

آخر الامر مکمل کی سمت کون حصوں میں تقسیم کرو۔ $\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$ اور $\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right]$

اس طرح سے دو تکملے مائل ہوتے ہیں پہلے میں وکی بجائے۔ و رکھو اس طرح میں
کے لئے ذیل کے دو تکملے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{میں} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{ف} (92 + 91) \text{ جب } (1 + 92) \text{ و}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{ف} (92 - 91) \text{ جب } (1 + 92) \text{ و} \dots (3)$$

اب ف (91) پر حقیقہ وہیں انیس ہم بیان کرتے ہیں۔ یہ محض کافی ہیں
ضروری نہیں۔

تفاعل سیر قیود۔ (۱) تفاعل کو محدود ہونا چاہیے جس کی عددی

قیمتوں کی اوپر کی حد مثلاً ع ہو (۲) بالعموم اسے سلسل ہونا چاہیے لیکن
ایس محدود تعداد محدود عدم تسلسلوں کی ہو سکتی ہے جن کی دفعہ ۶۳ میں
توضیح کی گئی ہے (۳) اسکی موڑ کی قیمتوں کی تعداد محدود ہونی چاہیے (مثلاً
تفاعل ایسا جب $\frac{1}{\pi}$ نہیں ہو سکتا)

اگر عا کوئی جھوٹا اگر ثابت مثبت عدد ہو تو وقع (ج۔ عا، ج۔ عا) کو ہم
ج کی پڑوس یا قرب کہینگے۔ اکثر قیمت ج (دفعہ ۱، حصہ اول) کی بجائے
ہم فقط ج کہینگے۔

ترقیم ف (91 ± 0) کو اکثر استعمال کیا جائیگا (دفعہ ۴، حصہ اول، دفعہ ۶۳)۔
اب سوال ہمارے سامنے یہ ہے۔ ہمیں یہ دیکھنا چاہیے کہ جب 'ن' لاتنا ہی
کی طرف مائل ہوتا ہے تو میں قیمت

$$\frac{1}{\pi} \{ \text{ف} (91 + 0) + \text{ف} (91 - 0) \}$$

کی طرف مائل ہوتا ہے اگر لا ± π کے مساوی نہ ہو اور

$$\frac{1}{\pi} \{ \text{ف} (91 - \pi) + \text{ف} (91 + \pi) \}$$

اب $\frac{1}{\text{فدا}} \text{ (واجب م ورو) } = \text{فدا} \frac{1}{\text{ (جب م ورو) }} + \frac{1}{\text{فدا} \frac{1}{\text{ (جب م ورو) }}} \frac{1}{\text{فدا}}$

$$= \text{فدا} \frac{1}{\text{ (جب م ورو) }} + \frac{\text{فدا} \frac{1}{\text{ (جب م ورو) }}}{\text{فدا}}$$

$$\text{اسلئے } \frac{1}{\text{فدا} \text{ (واجب م ورو)}} \geq \frac{1}{\text{فدا} \text{ (جب م ورو)}} + \frac{1}{\text{فدا} \text{ (جب م ورو)}} \frac{1}{\text{فدا}} > \frac{1}{\text{فدا}}$$

$$\text{اور } \frac{1}{\text{فدا} \text{ (واجب م ورو)}} > \frac{1}{\text{فدا} \text{ (جب م ورو)}} \frac{1}{\text{فدا}} \dots \dots \dots (۲)$$

مقادیر پ، ع متبادل لا پر منحصر نہیں ہیں، اسلئے جب 'م' لائنہا ہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو مکملہ (۱) یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔

نوٹ۔ اگر پ، لا پر منحصر ہو تو بھی ہم تسلیم کر سکتے ہیں کہ اسکی قیمت کی محدود اوپر کی حد ہے جو لا پر منحصر نہیں۔

اسی طرح سے دکھایا جاسکتا ہے کہ مکملہ

$$\frac{1}{\text{فدا} \text{ (واجب م ورو)}} \dots \dots \dots (۳)$$

یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جیسے 'م' لائنہا ہی ہو۔
اب فرض کرو کہ $\frac{1}{\text{فدا}} > \frac{1}{\text{فدا}}$ یعنی قیمتیں اور سب مثبت ہیں ہم ثابت کرینگے کہ مکملہ

$$\frac{1}{\text{فدا} \text{ (واجب م ورو)}} \dots \dots \dots (۴)$$

یکساں طور پر صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ 'م' لائنہا ہی کی طرف جاتا ہے۔

$$\frac{1}{\text{فدا} \text{ (واجب م ورو)}} = \text{فدا} \frac{1}{\text{ (جب م ورو) }} + \frac{1}{\text{فدا} \text{ (جب م ورو)}} \frac{1}{\text{فدا}}$$

اب فرض کرو کہ لا کسی نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں نہیں ہے، ایسا ہونے کی صورت دفعہ ۹ء میں بحث میں لائی جا چکی۔ ہم لا کو اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں کہ ہر لا پر بحث کے لئے اس (لا) اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ جب یہ چھٹائی کے درجہ مطلوبہ کے موافق لا کا انتخاب کر لیا جائے تو ہم م کو مقدر بڑا لیکن محدود دے سکتے ہیں کہ مکملہ

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$

اپنی اتھا ۲ سے اس قدر کم تفاوت ہو جو قدر ہم چاہیں اور سا تھ ہی مکملہ (۲) صفر سے اتنا کم تفاوت ہو جتنا ہم چاہیں۔ اب چونکہ (۲) میں سا (لا) کا تقریباً محدود ہے (۲ سے بڑا نہیں) اس لئے م کو ہم اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ (۴) کے بائیں جانب کا رکن $\frac{1}{x} \pi f (لا + ۰)$ سے اتنا کم تفاوت ہو جتنا ہم چاہیں خواہ لا کی کچھ ہی قیمت ہو، البتہ سوائے ان قیمتوں کے جو خارج کر دی گئی ہیں، ہمیں بالآخر یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty \quad \text{جب } \frac{1}{x} \pi f (لا + ۰) = \frac{1}{x} \pi f (لا + ۰) \dots (۵)$$

ٹھیک اسی طرح کے عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا ۲ کے مساوی نہ ہو اور نہ ہی یہ نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں ہو تو

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty \quad \text{جب } \frac{1}{x} \pi f (لا - ۰) = \frac{1}{x} \pi f (لا - ۰) \dots (۶)$$

$$\text{اور اس لئے } \int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty \quad \text{جب } \frac{1}{x} \pi f (لا + ۰) + \frac{1}{x} \pi f (لا - ۰) = \frac{1}{x} \pi f (لا + ۰) \dots (۷)$$

جہاں انتہائی طرف اشتقاق یکساں ہے۔ یہ شاہدہ طلب ہے کہ مساوات (۳) کی رو سے لا کی کسی دی ہوئی قیمت

کے لئے π کی انتہا اس قیمت کے پڑوس میں صرف ϕ (لا) کے

رویہ پر منحصر ہے۔

π کی انتہا کا فیصلہ اس صورت میں جبکہ $\pi = \text{لا}$ یا $\pi = -$ آسانی ہو سکتا ہے۔ اگر $\pi =$ تو (۳) دفعہ ۷ سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\pi = \frac{1}{\pi} \int \phi (2 - \pi) \frac{\text{جب } (1 + \pi^2) \text{ و } \phi \text{ و}}{\text{جب } \phi}$$

$\pi = \frac{1}{\pi} \int \phi \{ \phi (2 - \pi) + \phi (-\pi + 2) \} \frac{\text{جب } (1 + \pi^2) \text{ و } \phi \text{ و}}{\text{جب } \phi}$
سمت (۰) π کو صول (۰) $\left(\frac{\pi}{\phi}\right)$ میں تقسیم کرنے سے اور حدود
(۰) π دائے مکملہ میں وکی بجائے π ور کھنے سے۔

$\infty = \pi$ کے لئے انتہا ٹھیک پہلے کی طرح معلوم ہوتی ہے اور وہ ہے

$$\frac{1}{\pi} \{ \phi (2 - \pi) + \phi (-\pi + 2) \}$$

اور یہی قیمت حاصل ہوتی ہے جبکہ $\pi = -$

۷۔ عدم تسلسل اب فرض کر دو کہ لایک نقطہ عدم تسلسل کی پڑوس میں ہے۔ نیز فرض کر دو کہ شکل ۳۲ دفعہ ۶۲ ϕ (لا) کے گراف کو تعبیر کرتی ہے جہاں $\phi = \text{ج}$

$$1 \leq \phi = \text{ع} \leq \text{ع} \text{ اور } 1 \leq \text{لا} \leq \text{ع} - \text{اگر } \text{لا} = \text{و ک}$$

تو یقیناً ϕ (لا) اور ϕ (لا + ۲) ع ص کی متقابل جانبوں میں واقع ہونگے جب تک کہ ۲ و کم نہ ہوگ ع سے پس متقابل سار (لا + ۲)

چھوٹا نہیں ہو سکتا جب تک کہ لا کم نہ ہو۔ $\frac{1}{2}$ گ ع سے۔ اب اگر لا قیمت میں بہت قریب ہو ج کے یعنی اگر گ ع بہت چھوٹا ہو تو لا کی قیمت ایسی مل سکتی ہے جو (سا) لا (ا) کو چھوٹا بنا دے اور پھر م کی قیمت ایسی حاصل ہو سکتی ہے جو تکملہ (۲) دفعہ ۸ کو چھوٹا بنا دے اور (۲) دفعہ ۸ میں ف (لا + ۰) کا سر $\frac{1}{2}$ سے اتنا کم متفاوت ہو جتنا ہم چاہیں۔ لیکن اگر لا کو ج کے اور بھی زیادہ قریب لیا جائے تو لا کی مطلوبہ قیمت بندرج کم ہونی جاتی ہے اور م کی مطلوبہ قیمت بڑھتی جاتی ہے جس کی وجہ سے استدقاق نہایت سنست ہوتا جاتا ہے۔ لا کی کسی معینہ قیمت کے لئے استدقاق کا وجود ضرور ہے مگر ایسا عدد ملنا ممکن نہیں کہ جب م < م تو فرق

$$\left| \frac{1}{2} \text{ ف (لا + ۰) } - \frac{1}{2} \text{ جب م } \right| \text{ دو - } \frac{1}{2} \text{ ف (لا + ۰) } \left| \right|$$

دے ہوئے صدم سے کم ہو دفعہ (ج - عا) ج میں لا کی ہر قیمت کے لئے۔ دوسرے الفاظ میں استدقاق یکساں نہیں رہتا جبکہ لا عا کے قریب آتا ہے۔

جب لا دفعہ (ج - عا) ج کے درمیان واقع ہو تو تکملہ (۲) دفعہ ۸ کا استدقاق یکساں ہوتا ہے برعکس اسکے جب لا دفعہ (ج - عا) ج کے درمیان ہو تو تکملہ (۲) ہے جو غیر یکساں طور پر ستدق ہوتا ہے۔ جب لا = ج تو کوئی خصوصیت نہیں پیدا ہوتی اور

سب $\frac{1}{2}$ { ف (ج + ۰) + ف (ج - ۰) } کی طرف ستدق ہوتا ہے۔ نقطہ عدم مسلسل پر سلسلہ کی قیمت دفعہ ۵۰ مثلاً آتا میں دکھائی گئی ہے۔

۸۰۔ مبدأ اور دور کی تبدیلی۔ یہاں تک لا کی سمت ۲ سے ۲ رہی ہے لیکن اسی خوش اسلوبی سے سمت ۲ تا ۲ لیا جاسکتی ہے۔

تیسری نقطہ نظر سے سعت کی یہ تبدیلی مبدأ کو $(\pi - 0)$ پر بجانے کے معادل ہے اور تحلیل نقطہ نظر سے π کی بجائے ہم $\pi - 0$ رکھتے ہیں۔ اگر $f(\pi - 0)$ کو $f(0)$ سے تعبیر کریں تو سروس کی قیمتیں یہ معلوم ہوتی ہیں

$$f_1 = \frac{1}{\pi} f(\pi) \text{ فار (لا) فرلا (۱) } f_2 = \frac{1}{\pi} f(\pi) \text{ فار (لا) جم ن لا فرلا (۲)}$$

$$f_3 = \frac{1}{\pi} f(\pi) \text{ فار (لا) جب ن لا فرلا (۳)}$$

سلسلہ کی قیمت جبکہ ہر دو $\pi = 0$ اور $\pi = 2\pi$ یہ ہے

$$\frac{1}{\pi} \{ f(\pi) + f(2\pi) \}$$

نیز دور کوئی عدد معینہ لیا جاسکتا ہے مثلاً ۱۲، ہمیں π کی بجائے صرف $\frac{\pi}{12}$ رکھ دینا ہے۔ اگر $f(\frac{\pi}{12})$ کی بجائے $f(0)$ رکھیں تو سروس کے لئے ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$f_1 = \frac{1}{\pi} f(\pi) \text{ فار (لا) جم ن لا فرلا (۴)}$$

$$f_2 = \frac{1}{\pi} f(\pi) \text{ فار (لا) جم ن لا فرلا (۵)}$$

اور f_3 اور f_4 کی مثال قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ضابطہ (۴) میں سعت $(0, 12)$ مضمر ہے اور (۵) سعت $(0, 24)$ کے لئے زیادہ موزوں ہے۔

ان ضابطوں کو حفظ یا کرنے کی ضرورت نہیں۔ علی صورتوں میں مناسب

زاویہ π لایا $\frac{\pi}{12}$ کی جیب یا جیب التمام سے ضرب دیکر مناسب سعت

تکمل کرنا کافی ہوگا۔ سلسلے اور جیب التمام کے سلسلے۔ فرض کر دو دفعہ ۵، کا

ف (لا) طاق تفاعل ہے یعنی ف (- لا) = ف (لا) اس صورت میں
 $\frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا} = \frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا} + \frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا}$
 پس $\frac{1}{\pi} = 0$ نیز $\frac{1}{\pi} = 0$ لیکن جب کے لئے حاصل ہوتا ہے

جب $\frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا} = \frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا}$
 $\frac{2}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا} = \dots \dots \dots (1)$
 پس ف (لا) کے لئے جیب کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے

ف (لا) = $\frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا} \dots \dots \dots (2)$
 جہاں جب (۱) کے لئے ہے۔ سلسلہ صفر ہوتا ہے جبکہ لا = 0 اور
 $\pi = 0$ اس لئے ان صورتوں کے لئے یہ تفاعل کو تعبیر نہیں کرتا جب تک کہ
 ف (۰) اور ف (۰) صفر نہ ہوں۔
 بخلاف اس کے فرض کرو کہ ف (لا) جفت تفاعل ہے یعنی ف (- لا) = ف (لا)
 اس صورت میں جب $\frac{1}{\pi} = 0$ اور

$\frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا} = \frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا} + \frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا}$
 پس $\frac{1}{\pi} = 0$ نیز $\frac{1}{\pi} = 0$ لیکن جب کے لئے حاصل ہوتا ہے

اس طرح ف (لا) کے لئے جیب اتمام سلسلہ حاصل ہوتا ہے

ف (لا) = $\frac{1}{\pi} \text{ ف (لا) جم ن لا مر لا} \dots \dots \dots (3)$

جہاں $\frac{1}{\pi}$ (۳) اور (۴) سے ملتے ہیں۔

جیب التمام سلسلہ تفاعل کو دونوں صورتوں میں تعبیر کرتا ہے جبکہ $\pi = 2$ اور $\pi = 1$ کیونکہ

$$\frac{1}{2} \left\{ \text{ف} (0+) + \text{ف} (0-) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \text{ف} (+) + \text{ف} (-) \right\} = \text{ف} (0) \quad (۰)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \text{ف} (\pi-) + \text{ف} (\pi+) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \text{ف} (\pi-) + \text{ف} (\pi) \right\} = \text{ف} (\pi) \quad (\pi)$$

یہ دیکھنا آسان ہے کہ اوپر کے ضابطے (۱) ... (۵) کیا ہو جاتے ہیں جبکہ دور دور ہو۔

۸۲۔ عام امور کا ذکر۔ جب π کی سمت پورا دور π یا 2π ہو تو $\text{ف} (\pi)$ کے لئے ف میں یہ سلسلہ صرف ایک ہی ہو گا جہاں π کی گزشتہ دفعات کے بموجب حاصل ہوتے ہیں۔ صورت حال اور ہو جاتی ہے جبکہ π کی وسعت پورے دور کا صرف کوئی حصہ ہو۔ فرض کر دو کہ $\text{ف} (\pi)$ دیا گیا ہے سمت $(\pi-)$ کے لئے تب ایک ایسا تفاعل مثلاً $\text{ف} (\pi)$ حاصل کرنے کے لئے جو پورے دور کے لئے معلوم ہو ہم کوئی تفاعل $\text{ف} (\pi)$ سمت $(\pi-)$ کے لئے ایسا انتخاب کر سکتے ہیں کہ $\text{ف} (\pi) = \text{ف} (\pi)$ سمت $(\pi-)$ $\pi = 2\pi$ کے لئے لیکن $\text{ف} (\pi) = \text{ف} (\pi)$ سمت $(\pi) = 2\pi$ تک اب صرف ایک سلسلہ ہے جو $\text{ف} (\pi)$ کو تعبیر کریگا یہ سلسلہ $\text{ف} (\pi)$ کو تعبیر کریگا سمت $(\pi-)$ میں اور $\text{ف} (\pi)$ کو سمت (π) میں لیکن سر دونوں تفاعلوں $\text{ف} (\pi)$ اور $\text{ف} (\pi)$ پر منحصر ہونگے پس دور کے ایک حصہ پر تفاعل کو تعبیر کرنے کے لئے ہم سلسلوں کی کوئی سی تعداد حاصل کر سکتے ہیں لیکن صرف جیب اور جیب التمام کے سلسلے عملی نقطہ نظر سے ضروری ہیں۔ ان دونوں صورتوں میں $\text{ف} (\pi)$ سمت (π) کے لئے معلوم ہے اور تفاعل $\text{ف} (\pi)$

[$\pi \geq \pi$ یا $\pi \geq 0$] کی تعیین بالترتیب ساداتوں

$\text{ف} (\pi) = \text{ف} (\pi)$ $\text{ف} (\pi) = \text{ف} (\pi)$ سے ہوتی ہے۔
 ف میں سیر کا سلسلہ بالعموم یکساں طور پر مستحق ثابت کیا گیا ہے

طالب علم سلسلہ کی پہلی چند رقمیں مرتب کرے مثلاً پہلی چار اور دیکھے کہ تقرب کی نوعیت ایک شکستہ خط ہے۔

پہلا کے لئے سلسلہ ایک مسلسل تفاعل ہے۔

مثال ۲۔ مثال ۱ کے تفاعل کے لئے جیب التمام سلسلہ حاصل کرو۔

$$\text{اس صورت میں } ۱ = \frac{\pi}{2} \quad ۱ = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \text{ جم } ۲ \text{ (۱- جم } \frac{\pi}{2} \text{ ن)} \\ \frac{\pi}{2} \text{ ن}$$

$$\text{اور ف (۱) } = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ (جم } ۱ \text{ لا) } + \frac{\pi}{2} \text{ (جم } ۲ \text{ لا) } + \frac{\pi}{2} \text{ (جم } ۳ \text{ لا) } + \dots$$

پہلا کے لئے سلسلہ ایک مسلسل تفاعل ہے۔

مثال ۳۔ تفاعل ف (۱) = ۱ کے لئے (۱) جیب کا سلسلہ (۲) جیب التمام کا سلسلہ دریافت کرو۔

$$(۱) \text{ ف (۱) } = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ (جیب } ۱ \text{ لا) } + \frac{\pi}{2} \text{ (جیب } ۲ \text{ لا) } + \frac{\pi}{2} \text{ (جیب } ۳ \text{ لا) } + \dots$$

(۲) ف (۱) = ۱

طالب علم اسکی توجیہ کرے کہ جیب التمام کا سلسلہ صرف رقم مطلق میں آکے

تحوّل کیوں ہو جاتا ہے۔ (۱) میں جواز کی سمت $0 < \pi < \pi$ ہے۔

مثال ۴۔ ف (۱) کے لئے ایک جیب کا سلسلہ دریافت کرو جبکہ

ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک اور ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک

ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک اور ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک

ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک اور ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک

ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک اور ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک

ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک اور ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک

ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک اور ف (۱) = ۱ سے لا = مائیک

پھر (۱) میں رکھو لا = π اور حاصل ہوگا

$$\pi \text{ ہم } \pi = \frac{1}{\pi} - \text{حج } \frac{2}{\pi} = \text{حج } \frac{1}{\pi} - \text{حج } \frac{1}{\pi} \dots (5)$$

(۵) میں رکھو $\pi = 1$ اگر ی نہ صفر ہو اور نہ π کا ضعف ہو تو

$$\text{هم } 1 = \frac{1}{1} - \text{حج } \frac{2}{1} = \text{حج } \frac{1}{1} - \text{حج } \frac{1}{1} \dots (6)$$

(۶) میں ی کے لئے $\frac{1}{\pi} - 1$ رکھو تب اگر ی $\frac{1}{\pi}$ کا طاق ضعف

$$\text{نہ ہو تو مسی } = \text{حج } \frac{2}{1} - \text{حج } \frac{2}{1} \dots (7)$$

اب (۶) کو اس شکل میں لکھو

$$\text{هم } 1 = \frac{1}{1} - \text{حج } \frac{2}{1} = \text{حج } \frac{1}{1} - \text{حج } \frac{1}{1} \dots$$

ی = کے لئے (هم 1) کی انتہا صفر ہے اس لئے ی = ۰

$$\text{ی} = \text{لا} > \pi \text{ تک ہم تکمل کر سکتے ہیں اس لئے}$$

لوک جب لا = $\frac{1}{\pi}$ لوک (۱ - $\frac{1}{\pi}$) - $\frac{1}{\pi}$ قی درى ... (۸)

لیکن $\frac{1}{\pi} - 1 < (1 - \frac{1}{\pi})$ پس

$$\text{قی} > \frac{1}{\pi} > \left\{ \dots + \frac{1}{(2+\pi)(1+\pi)} + \frac{1}{(1+\pi)} \right\} \frac{1}{\pi}$$

$$\text{اور } \frac{1}{\pi} > \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} > \dots$$

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{۱۲}{۲} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-n)^2} + \frac{1}{1} = \frac{\pi^2}{۱۲}$$

(۲) میں ۱۲ کے لئے رکھو تب اگر صفر نہ ہو تو

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{۱۲}{۲\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-n)^2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{\pi^2}$$

(۱) میں رکھو لا = π

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{۱۲}{۲} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-n)^2} + \frac{1}{1} = \frac{\pi^2}{۱۲}$$

(۴) میں ۱۲ کے لئے رکھو تب صفر نہ ہونے کی صورت میں

$$(۵) \dots\dots\dots \frac{۱۲}{۲\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-n)^2} + \frac{1}{1} = \frac{1}{\pi^2}$$

نیز سنر $\frac{\pi^2}{۲} = \frac{\pi^2}{۱۲} - \frac{1}{\pi^2}$ اگلے (۴) اور (۲) سے

$$(۶) \dots\dots\dots \frac{۱۲}{۲} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-n)^2} = \frac{\pi^2}{۲}$$

یا ۱۲ = π^2 رکھنے سے

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{۱۲}{۲\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-n)^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

مثال کی طرح ہم آسانی لا متناہی حاصل ضرب کے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں

$$\dots\dots\dots \left(\frac{1}{\pi^2} + 1\right) \left(\frac{1}{\pi^2} + 1\right) \left(\frac{1}{\pi^2} + 1\right) = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\dots\dots\dots \left(\frac{1}{\pi^2} + 1\right) \left(\frac{1}{\pi^2} + 1\right) \left(\frac{1}{\pi^2} + 1\right) = \frac{1}{\pi^2}$$

۸۵ - نوریر کا دودھ لائیکلہ - دفعہ ۸ میں فرض کرو کہ فلا (۱۰)

ایک ایسا تفاعل $f(1+0)$ ہے جو دفعہ ۷ کے شرائط کو پورا کرتا ہے، اس صورت میں دفعہ ۸ کے نکتہ (۱) کی اوپر کی حد $\frac{1}{2}$ (۱۱-۱۲) کی بجائے ہم کوئی عدد ب لے سکتے ہیں جو $\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو۔ اس طرح ہمیں ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا } \frac{1}{2} f(1+0) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ و } 0 = 0. \text{ اگر } b < 1 < 0. \quad (1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} f(1+0) \text{ اگر } b < 1 = 0. \end{array} \right.$$

اسی طرح دفعہ ۸ کے (۶) کے مائل ذیل کا نتیجہ ہے

$$\text{نہا } \frac{1}{2} f(1+0) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ و } 0 = 0. \text{ اگر } b < 1 < 0. \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} f(1+0) \text{ اگر } b < 1 = 0. \end{array} \right.$$

(۲) میں فرض کرو کہ $0 = 0$ ، $1 = 1$ ، $b = 1$ یعنی 1 اور b منفی ہیں اور 1 جبریہ طور پر b سے کم ہے تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا } \frac{1}{2} f(1+0) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ و } 0 = 0. \text{ اگر } b > 1 > 0. \quad (3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} f(1+0) \text{ اگر } b > 1 = 0. \end{array} \right.$$

(۱) اور (۳) کو ایک ضابطہ میں اکٹھا کیا جاسکتا ہے یعنی

$$\text{نہا } \frac{1}{2} f(1+0) \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ و } 0 = 0. \text{ اگر } b > 1 > 0. \quad (4) \dots\dots\dots$$

سادہ ہے $\frac{1}{2} \{ f(1+0) + f(1-0) \}$ کے اگر $b < 0 < 1$

سادہ ہے $\frac{1}{2} f(1+0)$ کے اگر $b < 1 = 0$

سادہ ہے $\frac{1}{2} f(1-0)$ کے اگر $b = 1 < 0$

سادہ ہے صفر کے اگر $b < 1 < 0$

یا اگر ۷۰ ب کے
اگر تکملہ (۴) میں ب مثبت ہو اور اسے منفی تو انتہا بدلنے کے بغیر ہم ب کی بجائے
کئی ایسی بڑا عدد ب اور کوئی بجائے کوئی (جس پر یہ طور پر) اس سے چھوٹا عدد لے سکتے ہیں
کیونکہ مذکورہ انتہا صفر ہوتی ہے جبکہ تکملہ کے حدود ب، ب ہوں یا ۰۔
اگر یہ مان لیا جائے کہ تکملہ کے اوپر کی حد + تک اور نیچے کی - تک سمت
دیکر بجائی جاسکتی ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا } \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

یا لا + و کی بجائے عدا درج کرنے سے

$$\text{نہا } \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$\text{لیکن جب } \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

اس لئے (۵) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

بشرطیکہ مختلف استعمالے جائز ہوں۔ جو ایزر بحث کرنے کی یہاں گنجائش نہیں
لیکن طالب علم کے لئے یہ ثابت کرنے میں زیادہ دقت نہیں ہوگی کہ ضابطہ
(۶) درست رہتا ہے اگر ان قیود کے علاوہ جو اس سے قبل ف (لا) پر
لگائی گئی ہیں تغافل ایسا ہو کہ تکملہ

ف (لا) فر لا

مطلق طور پر صدق ہو جیسے لا، ∞ یا - ∞ کی طرف مائل ہو۔
تکملہ (۶) فورے کا دوہرا تکملہ کہلاتا ہے، جب 'ف' (لا) مسلسل ہو تو
تکملہ کی قیمت ف (لا) ہوتی ہے۔
ذیل کی خاص صورتیں آسانی سے حاصل ہوتی ہیں۔
اگر ف (لا) = ف (لا) تو لا < کی صورت میں

ف (لا) = $\frac{۲}{۳}$ جب لا بہ فر بہ آف (ع) جب ع بہا فر ع... (۷)
لیکن اگر ف (لا) = ف (لا) تو لا = کی صورت میں

ف (لا) = $\frac{۲}{۳}$ جب لا بہ فر بہ آف (ع) جم ع بہا فر ع... (۸)
نقطہ عدم تسلسل پر قیمت کے تعلق میں منقول قرار داد کے موافق۔

مثال۔ مساوات $\frac{\text{جف}}{\text{جفت}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}$ کا ایک ایسا حل معلوم
کر دو جو جائز ہوتے۔ لا < کے لئے اور ایسا کہ و = جبکہ لا =۔ اور

و = ف (لا) جبکہ ت = لا <۔
اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ و = تو کہ بہات جب لا بہا
تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے خواہ بہا کی کچھ ہی قیمت ہو، نیز اس شکل
ح (و بہا کا تفاعل) کا ہر جملہ مساوات کو پورا کرے گا۔
پس یہ معلوم ہو گا کہ

و = $\frac{۲}{۳}$ تو کہ بہات جب لا بہ فر بہ آف (ع) جب ع بہا فر ع
تمام شرائط کو پورا کرتا ہے۔ یہ مساوات کو پورا کرتا ہے کیونکہ یہ اس شکل

ح (دہرا x بہا کا تفاعل) کہ ہے، یہ تکملہ صفر ہے، جبکہ لا = ۱۰ اور تکملہ مساوی ہے
ف (لا) کے جبکہ ت = ۰، لا < ۱۰ اور یہی مساوات (۷) کی رو سے۔

۸۶۔ آزمائشی تفاعل۔ عملی صورتوں میں یہ سوال اکثر واقع ہوتا ہے

کہ کسی آزمائشی یا تجرباتی تفاعل کو فنی سرسیر کے سلسلہ سے تعبیر کیا جائے۔
طالب علم کو اگر اس کے حل کا موقع پیش آئے تو ترسیبی حل کا خاکہ اسے مصنف
کی کتاب اترسیمات کا رسالہ (Treatise on Graphs)

صفحات ۱۳۹-۱۴۳ اور تخلیلی حل مصنف کی کتاب مقہد احصا
(Introduction to the Calculus) صفحات ۳۰ تا ۳۹ میں ملے گا۔
تخلیلی طریق کی مفصل بحث کے لئے ملاحظہ ہوں پروفیسر سی رینگ (C. Runge)
کے مضامین

(Zeitschrift für Mathematik und Physik)

جلد ۴ صفحات ۴۴ تا ۵۹ اور جلد ۵ صفحات ۱۱ تا ۱۲۳ میں، نیز

(Elektrotechnische Zeitschrift 1905 (Heft 11)) میں -

۸۷۔ حوالے۔ نوریر کے سلسلوں کا علم بہت وسیع ہے، زیادہ مشہور
مکتوبات کا مختصر بیان

(Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol 1)

کے ایک مضمون میں ملیگا۔ مگر طالب علم خود فنی سرسیر کا وقت خیر رسالہ
(Théorie Analytique de la Chaleur)

(Edited by G. Darboux. paris: Gauthier-villars)

اس کا انگریزی ترجمہ اے، فری مین (کبرج، یونیورسٹی پریس) نے
کیا ہے۔ اس مضمون پر ایک نہایت عمدہ کتاب ڈبلیو، ای، بائوٹلے
کی ہے (پوسٹن، یو، ایس، اے۔ جن کمپنی)۔

An Elementary Treatise on Fourier Series and
Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics

اس کتاب میں ریاضی طبیعیات کے مسائل کی کئی عددی توضیحات ہیں۔

مشق ۲۰

امثلہ ۱۰ کے تقاضوں کے لئے فو میں دے کے سلسلے معلوم کرو۔

- ۱- ف (لا) = ۱ - لا = ۲ سے لا = ۳ تک اور ف (لا) = ۱ - لا = ۳ سے لا = ۴ تک -
- ۲- ف (لا) = ج (لا) = ۱ سے لا = ۲ تک اور ف (لا) = ج (لا) = ۳ سے لا = ۴ تک -
- ۳- ف (لا) = ۲ + لا = ۳ سے لا = ۴ تک اور ف (لا) = ۳ - لا = ۲ سے لا = ۳ تک -
- اور ف (لا) = ۲ - لا = ۳ سے لا = ۴ تک -
- ۴- سب کچھ وہی جواو پر مثال ۳ میں لیکن ہر جگہ ۲ کی بجائے ۱ -
- ۵- ف (لا) = ۱ - لا = ۲ سے لا = ۳ تک اور ف (لا) = ۱ + لا = ۳ سے لا = ۴ تک -
- ۶- ف (لا) = ج (لا) = ۱ سے لا = ۲ تک اور ف (لا) = ۳ - لا = ۲ سے لا = ۳ تک -
- ۷- جب لا کے لئے جیب التمام سلسلہ -
- ۸- ف (لا) کے لئے جیب التمام سلسلہ جبکہ ف (لا) = $\frac{1}{2}$ - لا = ۱ سے
- لا = $\frac{1}{2}$ تک اور ف (لا) = ۱ - لا = $\frac{1}{2}$ سے لا = ۱ تک -
- ۹- (۲ - لا) جب لا کے لئے جیب التمام سلسلہ
- ۱۰- ف (لا) کے لئے جیب سلسلہ جبکہ ف (لا) = $\frac{ب (لا)}{۱}$ سے
- لا = ۱ تک اور ف (لا) = ب (ج - لا) / (ج - لا) سے لا = ج تک -
- ۱۱- اگر ف (لا) مسلسل ہو لا = ۲ سے لا = ۳ تک اور اگر
- ف (۲) = ف (۳) تو ثابت کرو کہ ف (لا) کا مشتق ف (لا) کے

فورے کے سلسلہ کو تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے

۱۲۔ نو کے (۱) جیب التام سلسلہ (۲) جیب سلسلہ حاصل کرو۔ اس کا معائنہ کرو کہ کیا ہر ایک سلسلہ دوسرے سلسلہ سے تفرق یا تکمل سے حاصل ہو سکتا ہے یا نہیں۔

۱۳۔ اگر ف (لا) لا کا جفت تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ ف (لا) پر بعض قیود کے ماتحت

$$\begin{aligned} & \text{ف (لا)} + \text{ف (لا ۲)} + \text{ف (لا ۴)} + \dots \\ & + \text{ف (لا ۲)} + \text{ف (لا ۴)} + \dots \\ & \text{یعنی } \sum_{r=1}^{\infty} \text{ف (لا ۲}^r) \end{aligned}$$

ایک سلسلہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ کے تعبیر ہو سکتا ہے جہاں

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^n} \text{ اگر } n = 2^r \text{ اور } \frac{1}{n} = 0 \text{ اگر } n \text{ زوج ہے}$$

[ملاحظہ ہوں جوابات]
۱۴۔ مثال ۱۳ کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

۱۵۔ اگر ف (لا) دوری تفاعل ہو جس کا دور π ہو تو ثابت کرو کہ

ف (لا) ف (لا) ف (لا) = ف (لا) { ف (لا) + ف (لا) + ف (لا) + ... } (لا)

[شلو مش]

۱۶۔ اگر مثال ۱۵ میں ف (لا) = $\frac{1}{4}(\pi - \pi)$ (لا) تو ثابت کرو کہ

ف (لا) { ف (لا) + ف (لا) + ... } = ف (لا) { ف (لا) + ف (لا) + ... } (لا)

ف (لا) = ف (لا) رکھنے سے حاصل کرو کہ

$$\pi = \frac{\pi^2 - \pi^2}{\pi^2 - \pi^2} = \frac{\pi^2}{\pi^2 - \pi^2} + \frac{1}{\pi^2}$$

ف (لا) کے لئے قیمتیں ف (لا) جم مہلا، ف (لا) جب مہلا رکھنے سے
دیکھ سلسلے حاصل ہوتے ہیں۔
۱۷۔ مثال ۱۴ (۱) سے حاصل کرو کہ

$$\left\{ \frac{\pi^2}{1} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{9} + \dots \right\} = \frac{\pi^2}{6}$$

ثابت کرو کہ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$
[شلو مش] مساوی ہے ۳.۱۴۱۵۹ کے

۱۸۔ دفعہ ۸۵ کی مساواتوں (۷) (۸) میں رکھو ف (لا) = ف (لا) (۴)۔
اور یہ قیمتیں حاصل کرو

$$\pi = \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} \quad (لا) <$$

۲۵۔ ف (لا) پر انہی قیود کے ہوتے ہوئے جو ف (لا) پر عائد کی گئی ہیں ثابت کرو کہ اگر $\pi > \text{لا} > \pi$

$$\int_{\pi}^{\pi} \frac{f(\text{رو}) - f(\text{لا})}{\pi} = \frac{f(\text{لا}) + f(\text{لا})}{\pi} = \frac{f(\text{لا}) + f(\text{لا})}{\pi}$$

$$\int_{\pi}^{\pi} \frac{f(\text{و}) - f(\text{لا})}{\pi} = \frac{f(\text{و}) + f(\text{لا})}{\pi} = \frac{f(\text{و}) + f(\text{لا})}{\pi}$$

جہاں صہ مثبت قیمتوں میں سے ہو کر صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے۔

[ملاحظہ ہو مشق ۱۲ (۱۳)]



ضمیمہ تفرقوں پر نوٹ

دفعہ ۹۰ حصہ اول میں دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل کے تفرقہ فرع کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ یہ مفہوم کا صدری حصہ ہے تین غیر تابع متغیروں 'لا'، 'ما'، 'می' کے لئے مساوات ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف می}} \dots \dots (۱)$$

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اس صورت میں بھی فرع مساوات (۱) سے تعبیر ہو گا جبکہ متغیر 'لا'، 'ما'، 'می' غیر تابع ہونے کی بجائے دو یا زیادہ غیر تابع متغیروں کے تفاعل اہل تمام تفاعل اور ان کے پہلے جزوی شقوق کو مسلسل فرض کیا گیا ہے۔

فرض کر دو کہ 'لا'، 'ما'، 'می' دو غیر تابع متغیروں میں 'ت' کے تفاعل ہیں، اس لئے 'ع' غیر تابع متغیروں میں 'ت' کا تفاعل ہے اور 'ع' کا تفرقہ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف}}{\text{جف ت}} + \dots \dots (۲)$$

اب 'لا'، 'ما'، 'می' غیر تابع متغیروں میں 'ت' کے تفاعل ہیں، اس لئے ان کے تفرقہ ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{فر لا} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}}$$

$$\text{فر ما} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}} \dots \dots (۳)$$

$$\text{فر می} = \frac{\text{جف می}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف می}}{\text{جف ت}}$$

لیکن دفعہ ۹۰ حصہ اول کی مساواتوں (ب) سے

جف ۶ جف ۶ جف لا جف ۶ جف ۶ جف ما جف ۶ جف ۶ جف ی
 جف س جف لا جف س جف ما جف س جف ی جف س
 جف ۶ جف ۶ جف لا جف ۶ جف ۶ جف ما جف ۶ جف ۶ جف ی
 جف ت جف لا جف ت جف ما جف ت جف ی جف ت

فرع کی بجائے ترتیم جف ۶ کے استعمال کے متعلق ملاحظہ ہو صفحہ ۳۵۹
 فرس حصہ اول کے وسط میں اس امر کا ذکر۔

پہلی مساوات کو فرس کے ساتھ دوسری کو فرت کے ساتھ ضرب دینے
 اور جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

جف ۶ فرس + جف ۶ فرت = جف ۶ (جف لا فرس + جف لا فرت)
 جف س فرس + جف ت فرت = جف لا (جف س فرس + جف ت فرت)
 + جف ۶ (جف ما فرس + جف ت فرت) = جف ۶ (جف ی فرس + جف ت فرت)
 جف ۶ فرس + جف ۶ فرت = جف ۶ فرس + جف ۶ فرت (۲)

مساواتوں (۳) کو استعمال کرنے سے۔
 مساواتوں (۲) اور (۴) کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

فرع = جف ۶ فرس + جف ۶ فرما + جف ۶ فری

پس معلوم ہوا کہ فرع کے لئے جملہ 'فرلا'، 'فرما'، 'فری' کی رقوم میں اسی شکل
 کا ہے جیسا کہ 'لا'، 'ما'، 'ی' کے غیر تابع ہونے کی صورت میں۔ ظاہر ہے کہ
 ثبوت قائم رہتا ہے خواہ کسی ایک جٹ 'لا'، 'ما'، 'ی' یا 'س' ت کے متغیر
 کی تعداد کچھ ہی ہو۔

دفعہ ۹۸ حصہ اول میں ایک غیر تابع متغیر لا کے تفاعل ما یا ف (لا)
 کی تعریف ف (لا) فرلا کی گئی ہے، اس صورت میں فر لا صفر ہے یا

فر لا مستقل ہے، لیکن اگر ایک اور متغیر مثلاً t متغیر متبوع ہو یعنی $ما' لا$ کا
تفاعل ہو جبکہ $لا$ t کا تفاعل ہو تو $لا$ صفر نہیں ہوگا بلکہ
 $فر لا = لا فرت' فر ما = ما فرت'$

جہاں نقطوں سے تفرق بلحاظ t کے تعبیر ہوتا ہے۔

لیکن $ما = ف' (لا) (لا) + ف' (لا) لا$
پس $ما فرت' = ف' (لا) (لا فرت) + ف' (لا) لا فرت'$

یا $فر ما = ف' (لا) (لا) + ف' (لا) لا$ (۵)
پس $فر ما$ کے لئے جو جملہ ہے اس کی شکل اب وہی نہیں ہے جو کہ $لا$ کے متغیر
متبوع ہونے کی صورت میں تھی۔

$فر ما$ کی قیمت $ف' (لا) (لا)$ کا تفرقہ لینے سے (۵) حاصل ہو سکتی ہے پس
 $فر ما = فر (فر ما) = فر لا \times فرت' (لا) + ف' (لا) \times فر (لا)$
 $= فر لا \times ف' (لا) (لا) + ف' (لا) (لا) فر لا$
 $= ف' (لا) (لا) فر لا + ف' (لا) (لا) فر لا$

اسی طرح حاصل ہوتا ہے

$مر ما = مر (مر ما) = ف' (لا) (لا) مر لا + ف' (لا) (لا) مر لا$

دوسرے اور تیسرے تفرقوں کے لئے یہ جملے تخلیقی ہندسہ میں اکثر مطلوب ہوتے ہیں۔
دو یا زیادہ غیر تابع متغیروں کے تفاعل کے اعلیٰ تفرقے ذرا پیچیدہ ہیں۔ اگر

$$مرع = \frac{\text{جف } ع}{\text{جف } لا} مر لا + \frac{\text{جف } ع}{\text{جف } ما} مر ما$$

$$تو مرع = فر (فرع) = مر لا \left(\frac{\text{جف } ع}{\text{جف } لا} \right) + مر ما \left(\frac{\text{جف } ع}{\text{جف } ما} \right)$$

$$= مر لا \left(\frac{\text{جف } ع}{\text{جف } لا} \right) مر لا + مر ما \left(\frac{\text{جف } ع}{\text{جف } ما} \right) مر ما + مر لا \left(\frac{\text{جف } ع}{\text{جف } لا} \right) مر ما + مر ما \left(\frac{\text{جف } ع}{\text{جف } ما} \right) مر لا$$

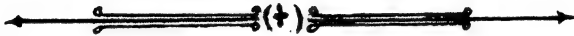
$$= \frac{\text{جف } ع}{\text{جف } لا} مر لا + \frac{\text{جف } ع}{\text{جف } ما} مر ما + \frac{\text{جف } ع}{\text{جف } لا} مر ما + \frac{\text{جف } ع}{\text{جف } ما} مر لا \dots (۶)$$

اگر مساوات (۱۱) دفعہ ۴۸ میں 'ک' 'ل' کی بجائے بالترتیب 'رلا' 'فرما' رکھا جائے اور 'ف' (رلا + ہ' ما + ک' ہی + ل) - 'ف' (رلا' ما' ہی) کی بجائے 'مف' 'ف' تو وہ مساوات یوں لکھی جاسکے گی

$$\text{مف ف} = \text{رف} + \frac{1}{4} \text{رف} + \frac{1}{12} \text{رف} + \dots$$

اگر 'لا' 'ما' 'ہی' غیر تابع متغیر نہ ہوں تو 'رلا' 'فرما' 'فری' مستقل نہیں ہیں اور 'فر' کے لئے جو جملہ ہوگا اُس کی شکل مندرجہ بالا سے مختلف ہوگی۔ (۶) کے بائیں جانب جو رقمیں ہیں ان میں ذیل کے جملہ کا اضافہ کرنا ہوگا

$$\frac{\text{جف} \text{ لا}}{\text{جف} \text{ لا}} + \frac{\text{جف} \text{ ع}}{\text{جف} \text{ ما}} \text{ فر} \text{ ما}$$



$$۱۴ - \frac{1}{4} \text{ جم } (۱+لا) - \frac{1}{18} \text{ جم } (۵+لا)$$

$$۱۵ - \frac{1}{4} لا + \frac{1}{8} \text{ جب } لا + \frac{1}{16} \text{ جب } لا + \frac{1}{32} \text{ جب } لا$$

$$۱۶ - \frac{2}{7} - ۱۷ - \frac{2}{7} - ۱۸ - \frac{2}{8} - ۱۹ - \frac{1}{4} \text{ لوک } ۳$$

$$۲۰ - \frac{1}{4} \text{ لوک } (\frac{3}{5}) - ۲۱ - \frac{2}{4} - ۲۲ - \frac{2}{4} - ۲۸ - (۳) \text{ جب } \frac{22}{3}$$

مشق ۲ صفحہ ۲۵

$$۱ - \frac{2}{234} \text{ سن } (\frac{3+لا}{234}) - ۲ - \text{ جب } (\frac{1-لا}{1})$$

$$۳ - \text{ لوک } [لا - \frac{1}{4} + لا - لا] - ۴ - \text{ جب } (\frac{1-لا}{1})$$

$$۵ - \frac{1}{4} \text{ لوک } (لا + لا) - ۶ - \sqrt{لا + لا}$$

$$۷ - \frac{1}{4} \text{ لوک } (\frac{1-لا}{1+لا}) - ۸ - \frac{1}{4} \text{ سن } (\frac{لا+1}{34})$$

$$۹ - \sqrt{لا + لا - ۳} - ۱۰ - \text{ لوک جب } لا - ۱۱ - \text{ لوک } (۱+جب لا)$$

$$۱۲ - \text{ لوک } (لا+جب لا) - ۱۳ - \frac{1}{4} \text{ سن } لا - \text{ سن } لا + لا$$

$$۱۴ - \frac{1}{4} \text{ مم } لا + \frac{1}{4} \text{ مم } لا + \text{ لوک جب } لا$$

$$۱۵ - \frac{1}{4} \text{ سن } (\frac{ب}{4} \text{ سن } لا)$$

$$۱۶ - \text{ جم } لا + \text{ جم } لا - \frac{3}{5} \text{ جم } لا + \frac{1}{5} \text{ جم } لا$$

$$۱۷ - \frac{1}{5} \text{ جم لا} + \frac{2}{2} \text{ جم لا} - \frac{1}{9} \text{ جم لا} - ۱۸ = \text{سلا مم لا}$$

$$۱۹ - \frac{1}{7} \text{ قط لا} - ۲۰ = ۲ \sqrt{۱-لا} \left\{ \frac{1}{5} (۱-لا) - \frac{1}{3} (۱-لا) \right\}$$

$$۲۱ - \frac{2}{3} (لا+۲) \sqrt{۱-لا} - ۲۲ = \text{لوک} (لا+۱) \sqrt{۱-لا} - \frac{2}{3} \text{ سن} \left(\frac{۱+لا}{3} \right)$$

$$۲۳ - (۱) \frac{1}{15} (۲) \frac{1}{15} (۳) \frac{\pi}{15} (۴) \frac{1}{15} \text{ لوک } ۳$$

$$(۵) \frac{1}{4} \text{ لوک } ۲ (۶) \frac{\pi}{3} (۷) \frac{\pi}{3} (۸) \frac{\pi}{2}$$

$$۲۴ - \frac{1}{4} \text{ لوک} (لا+۱) + \frac{1}{3} \text{ سن} \left(\frac{۱+لا}{3} \right)$$

$$۲۵ - لا - ۲ \text{ سن لا} - ۲۶ = \frac{1}{3} (۱-لا) + ۲ \text{ لوک} (لا+۳)$$

$$۲۷ - \frac{3}{8} \text{ لوک} (لا-۲) + \frac{1}{8} \text{ لوک} (لا+۲)$$

$$۲۸ - لا + ۴ \text{ لوک} (۱-لا) - \frac{2}{1-لا} - ۲۹ = \text{جب لا} - \sqrt{۱-لا}$$

$$۳۰ - \sqrt{۱-لا} + ۱ \text{ لوک} (لا+۱) \sqrt{۱-لا}$$

$$۳۱ - \sqrt{لا+۱} + \frac{1}{2} \text{ لوک} (لا+ \frac{1}{2}) + \sqrt{لا+۱}$$

$$۳۲ - \sqrt{لا-۱} + \frac{1}{2} \text{ جب لا} - \left(\frac{۱-لا}{2} \right)$$

$$۳۳ - \text{جب لا} \left(\frac{۱-لا}{3} \right) - ۳۴ = \frac{\sqrt{۱-لا}}{۱+لا} - ۳۵ = \frac{\sqrt{۱-لا}}{۱-لا}$$

$$۳۶ - \sqrt{\frac{لا-۱}{لا+۱}} - ۳۷ = \sqrt{\frac{لا+۱}{لا-۱}} - ۳۸ = \frac{1}{2} \text{ لوک} \left(\frac{لا}{لا+۱} \right)$$

۴۱ - (ر-و) قطعه

مشق ۴۱ صفحہ ۵۵

$$۱- \text{لوک } (۲+۳) - \frac{۱}{۴} \text{ لوک } (۱+۲) - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۲+۳)$$

$$۲- ۵ \text{ لا} - ۵ \text{ لوک } (۱-۲) + ۸۰ \text{ لوک } (۲-۳)$$

$$۳- \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (۱-۲) - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲) + \frac{۱}{۴} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۵- \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (۱-۲) + \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۶- \frac{۱}{۱۶} \text{ لوک } (۱-۲) - \frac{۱}{۱۶} \text{ لوک } (۱-۲) + \frac{۱}{۱۶} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۷- \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲) - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲) + \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۹- \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲) - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۱۰- ۲ \text{ لا} + \text{لوک } (۱-۲) + \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۱۱- \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲) + \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۱۲- \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (۱-۲) - \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۱۳- \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (۱-۲) - \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۱۵- \frac{۱}{۴} \text{ لوک } (۱-۲) - \frac{۱}{۴} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$۱۶- \frac{۱}{۴} \text{ لوک } (۱-۲) + \frac{۱}{۴} \text{ لوک } (۱-۲) + \frac{۱}{۴} \text{ لوک } (۱-۲)$$

$$\frac{1+y}{0.05(1+y)^2} - \frac{1}{0.05(1+y)^2} + \frac{1+y}{2} - \frac{5}{14} = -16$$

$$-18 - \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b} \text{ کو } \frac{1}{b+b}$$

$$-۱۹ - \frac{۱}{۱۲} \text{ مس } - \frac{۳ \text{ جب لا}}{۲} - ۲۰ - \frac{۱}{۱۲} \text{ لوک } + \frac{۲ \text{ جب لا}}{۴} - \frac{۱}{۴} \text{ لوک } - \frac{۱ \text{ جب لا}}{۱} + \frac{۱ \text{ جب لا}}{۱}$$

$$\frac{(2+1)}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(2+1)}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{(2+1)}{(4+1)(2+1)} \cdot \frac{1}{2} = -21$$

۲۲ - $\frac{1}{x^2}$ کو $\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$

$$-۲۳ \quad \frac{1}{۲۵} \text{ لوک } (۱+۹) + \frac{1}{۱۵۰} \text{ لوک } (۴+۲۰) - \frac{۲}{۶۵} \text{ لوک } (۳+۱)$$

$$+ \frac{8}{45} \text{ من } 12 - \frac{1}{15} \text{ من } 1 - \frac{1}{2} \text{ من } 1$$

$$22 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} - \frac{3}{2} \text{ من الـ}$$

$$-25 \quad \int \frac{1}{(1-\frac{1}{e})^{2-\alpha+2}} (b-1) \quad \text{مع}$$

۲۶ - ۱۷۲ - ۲۸۳ - ۱۷۲ - ۲۸۳

$$\left\{ r(1-y) \frac{1}{2} + r(1-y) \frac{r}{\delta} + y \right\} \sqrt{1-y} r = r \Delta$$

$$-۲۹ \quad \frac{۲}{ب} \quad \frac{۱۲+ب}{۱۱+ب} \quad -۳۰ \quad \frac{۱}{۲۶} \quad -۳۱ \quad \frac{۱۲+ب}{۱۱+ب}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{y}+1+\sqrt{y}}{\sqrt{y}-1+\sqrt{y}}}{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1\sqrt{y}}} \text{ دى } \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1\sqrt{y}} \text{ دى } \frac{1}{\sqrt{y}} = 1$$

$$-۳۲ \quad \frac{لا^۲}{لا۲} - \frac{لا لا لا^۲-۱}{لا۲} + \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (لا + لا^۲-۱)$$

$$-۳۳ \quad \frac{۱}{ب} \sqrt{لا + ب لا^۲} \left\{ \frac{۱}{۵} (لا + ب لا^۲) - \frac{۱}{۴} (لا + ب لا^۲) \right\}$$

$$-۳۴ \quad \frac{۲}{۲۵} (لا + لا^۲) - \frac{۲}{۱۵} (لا + لا^۲)$$

$$-۳۵ \quad \frac{(لا^۲-۱) \sqrt{لا + لا^۲}}{لا۲} - \frac{(لا-۱) \sqrt{لا}}{لا(لا+۱)}$$

$$-۳۶ \quad \frac{۱}{لا۲} \text{ لوک } \frac{لا + لا^۲-۱}{لا} + \frac{لا + لا^۲-۱}{لا} \text{ است } (لا + لا^۲-۱)$$

$$+ \frac{۱}{لا} \text{ است } (لا + لا^۲+۱)$$

باب دوم

مشق ۵، صفحه ۶۶

$$-۱ \quad \sqrt{\frac{۱}{لا + ب لا^۲}} \quad -۲ \quad \frac{ب}{\sqrt{لا + ب لا^۲}} \quad -۳ \quad \pi$$

$$-۴ \quad \frac{\pi^۳}{۱۴} \quad -۵ \quad \frac{\pi^۵}{۱۴} \quad -۶ \quad \pi$$

$$-۷ \quad \pi \quad -۸ \quad \frac{\pi(ب-لا)}{۸} \quad -۹ \quad \frac{\pi}{\sqrt{لا-ب لا^۲}}$$

$$-۱۰ \quad \frac{\pi}{لا + ب لا^۲} \quad -۱۱ \quad \frac{\pi(لا + ب لا^۲)}{لا۲}$$

۱۲- (زیست‌ان) / ذ

۱۴- مفر ۱۵- ۱- ۱۶- ۱۷-

$$18- \text{ن} - 19 - \frac{\pi}{2} - 20 - \frac{\pi^2}{\sqrt{-1}} \sqrt{\frac{-1}{-1+1}}$$

مشق ۶ صفحه ۷۶

$$[\frac{r}{2} - \frac{r}{2}(h+1)] \pi \frac{\pi}{r} \cdot \frac{r}{2} \pi r = 1$$

۲- π ه' ا ب ج ۳- $\frac{۲}{۳}$ ا ب، $\frac{۲}{۱۵}$ ا ب

$$\frac{(1+b)(1-b)\pi}{2} = \frac{(1+b)(1-b)\pi}{2}$$

$$\frac{f(\pi + \pi)}{2} + \frac{f(\pi - \pi)}{2} = 9 \quad \frac{b}{3} = 3$$

$$\frac{y_{\pi}^{\prime} y_{\pi}}{r} \cdot y_{\pi} = 11 \quad y_{\pi r}^{\prime} y_{\pi r} = 1.$$

$$r-14 \quad \frac{(\pi^2-1)^2 \pi}{4} - 13 \quad \frac{2(r-\pi)}{2} - 12$$

$$r_j r_{\pi} + r_j r_{\pi\delta} \left(\frac{u_j^2}{r} - 1 \right) r_{\pi} + r_j r_{\pi r} = -1$$

۱۹- $\frac{10}{4}$ ۲۰- $\frac{11}{2}$

۲۲- $\frac{L}{2} \left(\text{مس} \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \text{مس} \frac{w}{2} \right)$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-2} + \frac{1}{1+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-1} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{12} \pi = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{12} \pi = \frac{5}{12} \pi$$

$$\frac{1}{2} (\pi - 2) = \frac{1}{2} (\pi - 2) = \frac{1}{2} \pi - 1$$

مشق ۹ صفحہ ۹۰

$$\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{12} \pi = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{12} \pi = \frac{5}{12} \pi$$

باب سوم

مشق ۹ صفحہ ۱۳۰

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$4 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$5 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$6 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$7 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

باب ہشتم

- مشق ۱، صفحہ ۲۸۴

- ۱- ما = لا = م (۱ + لا ما) جہاں مستقل ہے۔
- ۲- جبے 'ما' - جبے 'لا' = م ۳- م ما = (۱-م ما) (لا + م)
- ۴- لا ما = م (۲ + لا) ۵- ما = م (لا) - $\frac{1}{م}$
- ۶- (۲ لا - لا ۳ + ۱) (لا + ۲ - ۲) = م
- ۷- لا = م + $\sqrt{ع + ج}$ فرعا جہاں سر = (۱ + م ب) ع + وج + ب گ
- ۸- ب ما + ۲ لا ما - ف لا - ۲ گ لا + ۲ ج ما = م
- ۹- ما = (لا + م) تو ۱۰- ما = $\frac{1}{۴}$ لا + $\frac{۵}{۴}$
- ۱۱- ما = (جبے 'لا + م) / (۱۱ - لا) ۱۲- (۱ + لا) ما = $\frac{1}{۴}$ لا + م
- ۱۳- ما = م تو + {رجم (ب لا ج) + ب جب (ب لا ج)} / (و + ب)
- ۱۴- $\frac{1}{۵} = \frac{۵}{۴}$ لا + ملا ۱۵- $\frac{۵}{۴}$ = م + لوک لا
- ۱۶- (لا + ۲ لا ما - ما - ۲ لا - ۲ ب ما = م
- ۱۷- (ما - ملا) = 'و م + ب' ، $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} = ۱$
- ۱۸- ما = ملا + م ، ۲ ما + ۳ لا = ۱۹- ما = ملا + م

$$۲۰ - م = (ا + و) + ب + ق = م = (ا + ب + و) + ج + ق = و$$

$$۲۲ - م = ق = (ا + جم + لا + ب + جب + لا) + (ب + جم + لا + ب + جب + لا) = ۲/۳$$

$$۲۳ - م = ا + و + ب + ق = لا + و$$

$$۲۴ - م = ا + جم + لا + ب + جب + لا + لا + (ا + جب + لا + ب + جم + لا) = ۲/۳$$

$$۲۵ - م = ا + ق + و + ب + ق = لا + لا + (ا + و) + ب + ق = ۲/۳$$

$$۲۶ - م = ق = (ا + جم + لا + ب + جب + لا) + (ا + ب + لا + ۱۵۶ + لا + ۲۶) = ۲۱۹۷$$

$$۲۷ - م = (ا + ب + لا + جم + لا) + (ع + ف + لا) + جب + لا$$

$$۲۸ - لا = ق = (ا + جم + ت + ب + جب + ت)$$

$$م = ق = \{ (ا - ب) + جم + ت + (ا + ب) + جب + ت \}$$

$$۲۹ - لا = ا + جم + ت + ب + جب + ت = م = \frac{۱}{۲} (ب - ا) + جم + ت = \frac{۱}{۲} (ا + ب) + جب + ت$$

$$۳۰ - لا = ا + و + ب + ق = ت = \frac{۲}{۵} - ت = \frac{۱۳}{۲۵} + \frac{۳}{۴} = ق$$

$$م = ا + و + ب + ق = ت = \frac{۳}{۵} - ت = \frac{۱۲}{۲۵} + \frac{۲}{۴} = ق$$

$$۳۱ - لا = (ا + ب + ت) + ق = (ع + ف + ت) + ق$$

$$م = \frac{۱}{۲} (ب - ا - ب + ت) + ق = \frac{۱}{۲} (ع + ف + ت) + ق$$

$$۳۲ - لا = ق + جم + ع = م = ق + جب + ع = \frac{۱}{۲} ج + ت$$

$$۳۳ - لا = ا + جم + ت = م = ب + جب + ت = ج + ن = م$$

$$۳۴ - \frac{۱}{۲} ق = م = \left[\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right] ت = \left[\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \right] م = جب + جم + ط = ج + ن = م$$

$$۳۵ - (۱) \text{ ب م ا } = \frac{۱}{۲۳} \text{ و } (لا^۲ - ۲ل لا^۲ + ل^۲ لا)$$

$$(۲) \text{ ب م ا } = \frac{۱}{۲۳} \text{ و لا } (ل - لا^۲)$$

$$(۳) \text{ ب م ا } = \frac{۱}{۲۳} \text{ و لا } (لا^۲ - ۲ل لا + ل^۲)$$

$$۳۶ - \text{ م ا } = (\text{ا ج م ن لا} + \text{ب ج ب ن لا}) / لا^۲ \text{ م ا } = \text{ب (ج ب ن لا)} / لا$$

$$۳۹ - (۱) \text{ م ا } = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ن}} + لا^۲ \quad (۲) \text{ م ا } = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ن}} + لا^۲ \text{ ج لا} - لا^۲ \text{ ل و ک لا}$$

$$(۳) \text{ م ا } = لا^۲ + \frac{\text{ب}}{\text{ن}} - \frac{۱}{۲} لا$$

$$۴۰ - \text{ م ا } = \text{ا ج م (ن ل و ک لا)} + \text{ب ج ب (ن ل و ک لا)}$$

$$۴۱ - \text{ م ا } = \text{ا} + \frac{\text{ب}}{\text{ر}} \quad ۴۲ - \text{ و } = \text{ا ل و ک ر ب ن ب}$$

$$۴۳ - \text{ ر ع ف م ا } = ۱ + لا^۲ = لا^۲ / (م - م ا^۲)$$

$$۴۵ - \text{ م ا } = \frac{۱}{۸} لا^۲ + لا + \frac{\text{ب}}{\text{ن}}$$

باب نهم

مشق ۱۸ صفحه ۳۰۹

$$۳ - (۱) لا < ۱ \text{ م ا } = \frac{\pi}{۲} \text{ و } لا > ۱ \text{ م ا } = \frac{\pi}{۲} \text{ و } لا > ۱ \text{ م ا } = \frac{\pi}{۲}$$

$$لا > ۱ \text{ م ا } = \frac{\pi}{۲}$$

$$(۲) لا < ۲ \text{ م ا } = \frac{\pi}{۲} \text{ و } لا > ۲ \text{ م ا } = \pi (لا^۲ - لا^۲) / لا^۲$$

$$لا > ۲ \text{ م ا } = \pi (لا^۲ + لا^۲) / لا^۲ \text{ و } لا > ۲ \text{ م ا } = \frac{\pi}{۲}$$

$$۲۰ - \text{لا} < ۱۲ \text{، مابہ } \frac{\pi ۲}{۲} \text{؛ } ۰ < \text{لا} > ۱۲ \text{، مابہ } \frac{\pi}{۲} \text{؛}$$

$$۱۲ > \text{لا} > ۰ \text{، مابہ } -\frac{\pi}{۲} \text{؛ } ۱۲ > \text{لا} \text{، مابہ } -\frac{\pi ۲}{۲}$$

باب دہم

مشق ۲۰ صفحہ ۳۸۱

$$۱ - \frac{۲}{\pi} (\text{جب لا} + \frac{\text{جب لا}}{۳} + \frac{\text{جب لا}}{۵} + \dots)$$

$$۲ - \frac{۲}{\pi} (\text{جب لا} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جب } \frac{۱}{۳} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جب } \frac{۱}{۵} + \dots)$$

$$۳ - \frac{۲}{\pi} + \frac{\pi ۲}{۸} (\dots - \frac{\text{جم لا}}{۱} + \frac{\text{جم لا}}{۲} - \frac{\text{جم لا}}{۳} + \dots)$$

$$- \frac{۲}{\pi} (\dots - \frac{\text{جم لا}}{۲} + \frac{\text{جم لا}}{۴} - \frac{\text{جم لا}}{۶} + \dots)$$

$$۴ - \frac{۱۲}{\pi} + \frac{۱۳}{۸} (\dots - \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۱} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۲} - \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۳} + \dots)$$

$$- \frac{۱۲}{\pi} (\dots - \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۴} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۶} - \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۸} + \dots)$$

$$۵ - \frac{۱۳}{۲} - \frac{۱۴}{\pi} (\dots + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۵} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۳} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۷} + \dots)$$

$$۶ - \frac{۱}{۴} - \frac{۱۲}{\pi} (\dots + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۱۵} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۱۳} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جم } \frac{۱}{۱۱} + \dots)$$

$$+ \frac{۱}{\pi} (\text{جب لا} - \frac{\text{لا}}{۱} \text{جب } \frac{۱}{۲} + \frac{\text{لا}}{۱} \text{جب } \frac{۱}{۳} - \frac{\text{لا}}{۱} \text{جب } \frac{۱}{۴} + \dots)$$

$$-۷ \quad -\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\text{جم } ۲}{۳ \times ۱} + \frac{\text{جم } ۴}{۵ \times ۳} + \frac{\text{جم } ۶}{۷ \times ۵} + \dots \right)$$

$$-۸ \quad \frac{2}{12} + \frac{2}{12} \left(\frac{1}{24} \text{ جم } ۲ - \frac{1}{12} \text{ جم } ۴ + \frac{1}{24} \text{ جم } ۶ - \dots \right)$$

$$+ \frac{2}{24} \left(\text{جم } ۲ - \frac{1}{36} \text{ جم } ۴ + \frac{1}{24} \text{ جم } ۶ - \dots \right)$$

$$-۹ \quad ۱ + \frac{1}{2} \text{ جم } ۲ - \left(\frac{\text{جم } ۲}{۳ \times ۱} + \frac{\text{جم } ۴}{۵ \times ۳} + \frac{\text{جم } ۶}{۷ \times ۵} + \dots \right)$$

$$-۱۰ \quad \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \text{ جب } ۲ + \frac{1}{4} \text{ جب } ۴ + \frac{1}{6} \text{ جب } ۶ + \dots \right)$$

$$-۱۲ \quad (۱) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ جم } ۲ - ۱ \text{ جم } ۲$$

$$(۲) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - (۱ - \text{جم } ۲) \text{ جب } ۲$$

۱۳- اگر سلسلہ یکساں طور پر ستقد ہو جبکہ لا وقفہ (۰، ۱) کے اندر ہو

تو یہ آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ ہر لا کے لئے یہ یکساں طور پر ستقد ہے اور ایک

جفت دوری تقابل مثلاً فدا (لا) کو تعبیر کرتا ہے جس کا دور ۲ لا ہے۔

فدا (لا) کو وقفہ (۰، ۱) کے درمیان جیب التمام سلسلہ میں پھیلاؤ۔ سر معلوم

کرنے کے لئے ہم رقم برقم مکمل کر سکتے ہیں۔ جیب التمام سلسلہ فدا (لا) کو ہر

لا کے لئے تعبیر کرتا ہے۔

سلسلہ

فہرست اصطلاحات

متکلی احصاء (گین) حصہ دوم

Abscissa

Absolute convergence

Adiabatic

Amplitude

Anchor ring

Approximation

Arbitrary constant

Argument

Asymptote

Battery

Bending of beams

Bessel's function

Calculus

Calculus of variations

فصلہ
مطلق استدقاق

حرنا گذار

حیطہ، سعت

لنگر چلا

تقرب

اختیاری مستقل

وجہ (دلیل)

متقارب

مورچہ

شہنشویں کا جھکاؤ

بیسل کا تفاعل

احصاء

احصاء و تغیرات

Canonical form	صورت آئینی
Cardioid	خط صنوبری
Catenary	زنجیرہ
Circuit	حلقہ، دورہ
Clairaut's form	کلیراوی صورت
Closed curves	بند تختہ
Commutative Law	قانون تبدیلی (مبادلہ)
Complementary function	متمم تفاعل
Complete integral (differential)	پورا تکملہ (تفرقہ)
Complete primitive	کامل ابتدائی
Concavity	تقعیر، گہراؤ
Conditionally convergent	شرطاً مستند
Conocuneus	خرد طافانہ
Conservative system of forces	قوتوں کا نظام بقائی
Continuity	تسلسل
Convergent	مستند
Convexity	تحدب، ابھار
Coordinate	محدد
Current coordinates	رواں محد
Curvature	انحناء
Curve tracing	منحنیات کی ترسیم
Cusp	قرن
Cycloid	خط تدویر
Deflection	انصراف
Definite integral	محدد تکملہ

Degree

Derivative

Differential

Differential Calculus (equations)

Differentiate

Differentiation

Dirichlet's Integral

Discontinuity

Discontinuous

Discriminant

Distributive law

Double Integral

Eccentric anomaly

Eccentricity

Electromotive force

Electron

Eliminant

Ellipse

Ellipsoid

Empirical function

Entropy

Envelope

Epicycloid

Equiangular spiral

Equilateral Hyperbola

درجہ

مشتق

تفریق، تفریق
تفریق احصاء (مساواتیں)

تفریق کرنا

تفریق

ڈیرشلے کا انٹگرل

عدم تسلسل

غیر مسلسل

ممیزہ

قانون تقسیمی

دوہرہ انٹگرل

خروج المکرزبے قاعدگی

خروج المکرز

قوت محرکہ برقی

برقیہ

حاصل اسقاط

قطع ناقص

ناقص بنا

استحاثی تفاعل

ناکارگی

لفاف

برمدویر

مساوی الزواہیہ لولبی

قائم قطع زائد (قائم زائد)

Exact Equation	ٹھیک، حاضر یا تیار مساوات
Evolute	برعکس
Explicit (function)	تصریحی (تفاعل)
Flexural rigidity	خمیدگی کی استواری
Fourier's series	فوریر یا فورے کا سلسلہ
Fluxion	روانی
Flux (fluent)	بہاؤ (بہنے والا)
Folium of Decartes	کارٹیزی پتیا
Gamma function	گاما تفاعل
Generalised integral	تعمیمی تکامل
Gradient	ڈھال
Gyroscope	گردش نما
Gyrostatic Pendulum	گردشی تقاص
Harmonic curve	موسیقی منحنی
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic substitution	زائدی ابدال
Hypocycloid	درتدویر
Impedance	مقاومت
Indefinite integral	نامحدود تکامل
Indeterminate forms	غیر معین صورتیں
Inductance	امالیت
Inertia	جمود
Infinite limits	لاستناہی حدود
Infinite series	لاستناہی سلسلہ
Infinite simal	صغاری (صغاریات)

Inflexion

انعطاف

Integral

تکمیل

Integral Calculus

تکمیل احصاء

Integrand

تکمیل

Integrate

تکمیل کرنا

Integration

تکمیل

Integrating factor

تکمیل جزو ضربی

Integration by parts

تکمیل بالخصوص

Integratph

تکمیل مرسام

Intrinsic equation

ذاتی مساوات

Involute

درمیچہ

Irrational function

غیر منطوق تقاض

Irreversible (process)

غیر انقلاب پذیر (عمل)

Lemniscate

آئیرن کی شکل کا منحنی

Linear Equations

خطی مساواتیں

Lituus

عصا کی شکل کا منحنی

Loop

حلقہ

Lower Limit

نیچلی حد

Maclaurin's theorem

مکلاورن کا مسئلہ

Mean value Theorem

اوسط قیمت کا مسئلہ

Moment of Inertia

جمود کا معیار

Monotonic

یک رنگ

Non Convergent

غیر مستند

Node

عقدہ

Octant

شمن

Operator

عامل

Order

رتبہ

Ordinary (differential equations)

معمولی (تفرقی مساواتیں)

Ordnate

معیین

Parabola

قطع مکانی

Paraboloid

مکانی مناس

Parallel curves

متوازی منحنی

Parameter

متبادل

Partial (differentiation,
differential equations)

جزوی (تفرق،
تفرقی مساواتیں)

Partial fractions

جزوی کسور

Particular integral

خاص یکم

Pedaicurve

پائین منحنی

Planimeter

سطح پیم

Potential

قوتہ

Power Series

قوتی سلسلے

Primitive

ابتدائی

Prolate spheroid

لبوتر اکرو مناس

Quadratic function

دو درجی تفاعل

Range of integration

مکمل کی وسعت یا سمیت

Rate

شرح

Rectification

تخطیط

Raduction formulæ

تحویلی ضابطے

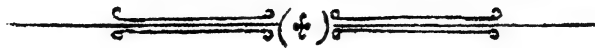
Remainder

باقی

Repulsion

دفع

Rigid dynamics	استواری حرکیات
Self inductance	ذاتی امالیت
Semicubical Parabola	نیم کعبی مکافی
Simultaneous equations	ہمزمانہ مساواتیں
Singular solution	نادر حل
Space rate	مکافی شرح
Spiral	لولب، لولبی
Standard forms	معیاری صورتیں
Stationary value	قائم قیمت
Steps of a (moving point)	قدم (متحرک نقطہ کے)
Successive (differentiation reduction	متواتر (تفریق تحوّل)
Taylor's Theorem	ٹیلر کا مسئلہ
Time rate	زمانی شرح
Total derivative	پورا مشتق
Transcendental	ماورائی
Triple Integral	تہر تکمیل
Turning (point, value)	موجر (کا نقطہ، کی قیمت)
Upper limit	اوپر کی حد
Uniform convergence	یکساں استدقاق
Unlimited (integral, interval)	بلا حد (تکمیل، وقفہ)



[ترقیم جو اس کتاب میں استعمال کی گئی ہے]

$A, B, C, D,$

$a, b, c, d,$

x, y, z

$X Y Z$

α, β, γ

l, m, n

ϕ, ϕ, μ

ξ, η, ζ

λ, μ, ν

$f(x)$

$F(x)$

$\Phi(x)$

$\sin x$

$\cos x$

$\tan x$

$\cot x$

$\sec x$

$\operatorname{cosec} x$

$\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x,$

$\cot^{-1} x, \sec^{-1} x, \operatorname{cosec}^{-1} x,$

ا، ب، ج، د،
ا، ب، ج، د،
لا، ما، می

لا، ما، می

لا، ما، می

لا، ما، می

لا، ما، می

لا، ما، می

لا، ما، می

لا، ما، می

لا، ما، می

ف (لا)

فا (لا)

فہ (لا)

جب لا

جم لا

مس لا

مم لا

قط لا

قم لا

جب لا، جم لا، مس لا

مم لا، قط لا، قم لا

Sine hyperbolic ($\sinh x$)

نامدی جیب (جنرلا)

 $\sinh x, \cosh x, \tanh x$

جنرلا، جمنرلا، منرلا

 $\coth x, \operatorname{sech} x, \operatorname{cosech} x$

منرلا، قنظرلا، قنرلا

 $\sinh^{-1} x, \cosh^{-1} x, \tanh^{-1} x$

جنرلا، جمنرلا، منرلا

 $\coth^{-1} x, \operatorname{sech}^{-1} x, \operatorname{cosech}^{-1} x$

منرلا، قنظرلا، قنرلا

123 57

5123 57

 π π

Exponent (e)

قوت ناما (قو) یا صرف (نو)

 e^x

قو

 a^x

لا

 $\log_e x$

لوگ ولا [یا صرف لوگ لا]

 $\log_{10} x$

لوگ لا

 ϵ

سہ ما صہ

 ∞ ∞

Limit, Lt

انتہا، نہا

Lt $f(x) = A$

نہا ف (لا) = A

 S_{n+1}

س

S

س

time (t)

وقت (ت)

arc (s)

قوس (س)

differential (d)

فرقی (فر)

differential coefficient $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

تفریق سر (فرما / فرلا)

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

فرما، فرما، فرما
فرلا، فرلا، فرلاPartial differential Coefficient $\frac{\partial}{\partial x}$

جزوی تفریق سر (جف / جفلا)

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}, \dots$$

جف ما، جف ما، جف ما
جف لا، جف لا، جف لا

$$\delta x, \delta y, \delta z$$

مف لا، مف ما، مف ی

$$dx, dy, dz$$

فرلا، فرما، فری

$$f'(x), f''(x)$$

ف (لا)، ف (لا)، ...

Operator (D)

عال تفریق (عف)

$$Dy, D^2y$$

عفا ما، عفا ما، ...

$$\nabla^2 u$$

لفا،

Summation (S, ∑)

مجموعہ (م، ∑)

$$\int_a^b F(x) dx$$

∫^ب ف (لا) فرلا

$$\iint f(x, y) dx dy$$

∫∫ ف (لا، ما) فرلا فرما

$$[D^{-1}F(x)]_a^b$$

[عفا ف (لا)]^ب

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

∫[∞] ف (لا) فرلاGamma Function $\Gamma(n)$

گاما تفاعل (جا، ن)

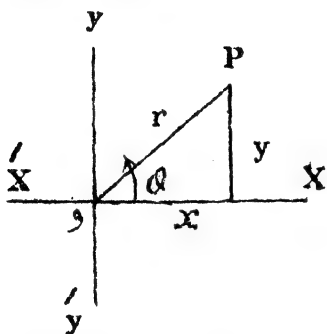
(Beta Function) $B(m, n)$

بیٹا تفاعل (با، م، ن)

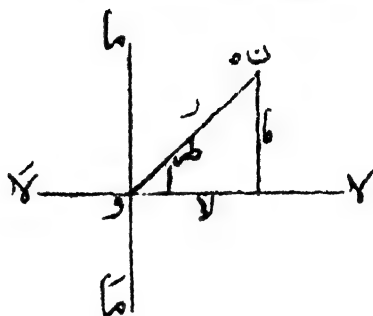
Bessel function $J_r(x)$

Sum Σ

$$\sum_{h=1}^{\infty} A_h \cos h x$$



بیسل کا تفاعل ہے (لا)
مائل جمع حج حج یا حج
حج ان جم ن لا



Velocities u, v, w

Kinetic energy E

Work K

Potential V

Pressure P

Volume V

رفتاریں ع و ا و ہ
توانائی یا حرکت ح ا
کام، ک
توہ، ق
دباؤ، د
حجم، ح



